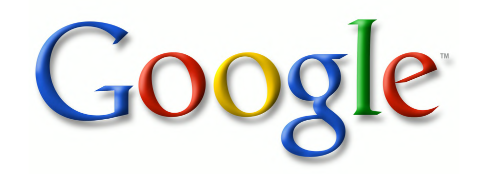
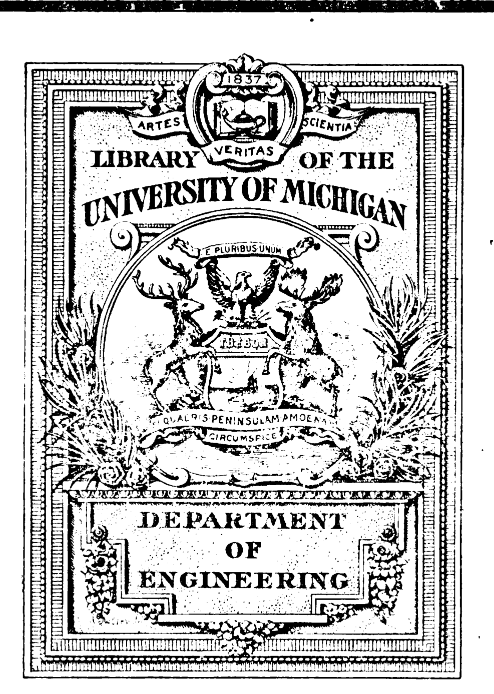


Mathematisch-physikalische Schriften für Ingenieure und Studierende.

Herausgegeben von **Dr. E. Jahnke,**

Prof. a. d. Kgl. Bergakademie zu Berlin.

Die Entwicklung der modernen Technik drängt auf stärkere Heranziehung der mathematischen Methoden. Der Ingenieur indessen, welcher bereit ist, sich mit dem nötigen Rüstzeug



IV. Die Theorie der Besselschen Funktionen. Von P. Schafheitlin, Prof. am Sophien-Realgymn. zu Berlin. 1908. Geh. *M* 2.80, geb. *M* 3.20.

V. Funktionentafeln m. Formeln und Kurven. Von E. Jahnke

... Von P. Schwahn, Direktor der Urania in Berlin. 1910. Geh. *M* 3.20, geb. *M* 3.60.

IX. Die Determinanten. Von E. Netto, Prof. an der Univ. Gießen. 1910. Geh. *M* 3.20, geb. *M* 3.60.

X, 1. Einführ. in die kinetische Theorie der Gase. Von A. Byk, Privatdoz. a. d. Univ. u. Tech. Hochsch. Berlin. I. Teil: Die idealen Gase. 1910. Geh. ℳ 2.80, geb. ℳ 3.20.

XI, 1. Grundzüge der mathematisch-physikalisch. Akustik. Von Dr. Alfred Kalähne, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Danzig. I. Teil. 1910. Geh. ℳ 3.20, geb. ℳ 3.60.

XII. Die Theorie der Wechselströme. Von Prof. Dr. Ernst Orlich an der Phys.-Techn. Reichsanst. Charlottenburg. 1912. Geh. ℳ 2.40, geb. ℳ 2.80.

XIII. Theorie der ellipt. Funktionen. Von Dr. M. Krause und Dr. E. Naetsch, Prof. an der Techn. Hochschule Dresden. 1912. Geh. ℳ 3.60, geb. ℳ 4.—

In Vorbereitung:

Die Randwertaufgaben in der theoret. Physik. V. P. Debye, Dipl.-Ing. in München.

Die mathematischen Instrumente. Von A. Gallé, Prof. a. Geodät. Institut b. Berlin.

Potentialtheorie. Von R. Gans, Prof. an der Univ. Tübingen.

Dispersion und Absorption des Lichtes. Von D. Goldhammer, Prof. a. d. Univ. Kasan.

Getriebelehre. Von M. Grübler, Prof. an der Techn. Hochschule Dresden.

Schwingungsprobleme. Von E. Grüneisen, Privatdoz. an der Universität Berlin.

Festigkeitsprobleme der modernen Maschinentechnik. Von Th. v. Karman, an der Univ. Göttingen.

Thermoelektrizität. Von F. Krüger, Privatdoz. an der Univ. Göttingen.

Konforme Abbildung. Von L. Lewent, Oberlehrer in Berlin.

Über Berechnung spezieller elektrischer und magnetischer Felder. Von Dr.-Ing. u. Dr. phil. L. Lichtenstein in Charlottenburg.

Einführung in die Elastizitätstheorie. Von R. Marcolongo, Prof. an der Univ. Neapel.

Aus der Berufsgeschichte des Ingenieurs an Hand seiner Werke. Von Matschoss, Privatdoz. a. d. Techn. Hochschule Berlin.

Technische Hydromechanik. Von Dr. R. Edler von Mises, a. o. Prof. an der Universität Straßburg i. E.

Grundlagen der Zeit- und Ortsbestimmungen. Von Dr. J. Möller, Oberlehr. i. Elsfleth.

Die Streuung des Transformators. Von Dr.-Ing. W. Rogowski, a. d. Physik.-Techn. Reichsanst. Charlottenburg.

Die Fourierschen Reihen. Von R. Rothe, Prof. an der Kgl. Bergakademie Clausthal.

Die partiellen Differentialgleichungen. Von R. Rothe in Clausthal.

Elektromagnetische Schwingungen. Von Dr.-Ing. R. Rüdenberg in Berlin.

Die Theorie der Ionisation der Gase. Von G. Rümelin, Privatdoz. a. d. Univ. Freiburg.

Seismik. Von H. Schering, an der Physik.-Techn. Reichsanstalt Charlottenburg.

Die Wechselstrommotoren. Von J. Sumec, Prof. a. d. Techn. Hochschule Brünn.

Ausgew. Spannungsprobleme des Bauingenieurs. Von A. Timpe, Privatdozent a. d. Techn. Hochschule Aachen.

☛ Die Sammlung wird fortgesetzt.

MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE SCHRIFTEN
FÜR INGENIEURE UND STUDIERENDE
HERAUSGEGEBEN VON E. JAHNKE

4

DIE THEORIE
DER BESSELSCHEN FUNKTIONEN

VON

PROF. DR. PAUL SCHAFHEITLIN
OBERLEHRER AM SOPHIEN-REALGYMNASIUM ZU BERLIN

MIT EINER FIGURENTAFEL



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908



Vorwort.

Eine selbständige Schrift in deutscher Sprache zum ersten Studium der Besselschen Funktionen ist nicht vorhanden. Das früher viel benutzte Werk von Lommel ist vergriffen; das Buch von Graf und Gubler ist als Anfangsstudium für Studierende kaum, für Ingenieure und Techniker gar nicht geeignet, und das Handbuch von Nielsen ist nicht sowohl zum Studium berechnet als vielmehr ein Nachschlagewerk, in dem ziemlich alle bisher bekannten Sätze, Formeln usw. über Besselsche Funktionen zusammengestellt sind. Vortrefflich ist die Einführung, die H. Weber in diese Funktionen gibt; da sie aber nur einen Abschnitt seiner Bearbeitung der Riemannschen partiellen Differentialgleichungen bildet, so ist sie naturgemäß etwas knapp gehalten und beschränkt sich im wesentlichen auf ganzzahlige Parameter, ja eigentlich nur auf die Funktionen nullter und erster Ordnung.

Mit diesem kleinen Buche glaube ich daher keine überflüssige Veröffentlichung zu machen und hoffe, daß es für die Kreise, an die sich diese Sammlung von Schriften wendet, von einigem Nutzen sein wird.

Zu besonderem Danke bin ich Herrn Ingenieur F. Emde verpflichtet für die große Mühe, die er sich durch das Lesen der Korrektur gemacht hat, und für manche Bemerkungen, die besonders in Hinblick auf Leser aus den Kreisen der Technik mir von großem Werte waren.

Berlin, im Juli 1908. P. Schafheitlin.

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Die Besselschen Funktionen erster Art.

II. Abschnitt.

Die Besselschen Funktionen zweiter Art und semikonvergente Reihen.

III. Abschnitt.

Darstellung willkürlicher Funktionen durch Besselsche Funktionen und Integrale mit Besselschen Funktionen.

Einleitung.

Zu den Funktionen, die in den letzten fünfzig Jahren in immer steigendem Maße das Interesse der Mathematiker und der Physiker erweckt haben, gehören die Besselschen Funktionen, die von manchen Autoren auch Zylinderfunktionen genannt werden.

Auf spezielle Fälle dieser Funktionen, nämlich diejenigen, die jetzt als Besselsche Funktionen von der Ordnung Null und Eins bezeichnet werden, wurde zuerst wohl Daniel Bernoulli[1]) im Jahre 1732 geführt, und zwar bei der Behandlung des Problems der Schwingungen einer homogenen Kette, die am oberen Ende befestigt ist und mit dem unteren Ende um die Gleichgewichtslage schwingt. Bei derselben Aufgabe stieß auch Euler[2]) im Jahre 1781 auf diese Funktionen.

Bei dem Problem der Wärmeleitung in einem festen Zylinder gelangten Fourier[3]) und Poisson[4]) ebenfalls zu der Besselschen Funktion der nullten Ordnung.

Von einer neuen Funktionsgruppe und einer Theorie derselben kann aber erst gesprochen werden, seitdem Bessel[5]) in seiner wichtigen Abhandlung: „Untersuchungen über den Teil der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht" eine allgemeine Funktion definiert hatte, die nicht wie jene speziellen Fälle im wesentlichen nur von einer, sondern von zwei Variabeln abhängig ist, die man jetzt als Argument und Parameter unterscheidet. Bessel gab in jener Arbeit eine Integraldarstellung und die Entwicklung der Funktionen nach Potenzen des Arguments und stellte die Differentialgleichung auf, der die Funktionen

1) Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter suspensae. Commentarii Academiae Petropolitanae, Bd. 6, pag. 108—129. 1732—33 (1738).

2) De oscillationibus minimis funis libere suspensi. Acta Academiae Petrop., pag. 157—177. 1781.

3) Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822. (Deutsch von Weinstein, Berlin 1884).

4) Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides. Journ. de l'Ecole Polytechnique, cah. 19, pag. 249—403. 1823.

5) Abhandlungen der Berliner Akademie für 1824, S. 1—52. (1826).

genügen. Ferner fand er die Relationen, die zwischen den Funktionen mit verschiedenen Parametern existieren, und so ist es wohl berechtigt, jene Funktionen mit seinem Namen zu belegen, wie dies zuerst von Schlömilch[1]) im Jahre 1857 und kurz darauf von Lipschitz[2]) geschehen ist.

Die erste selbständige Schrift über diese Funktion rührt von Carl Neumann[3]) aus dem Jahre 1867 her; im Jahre darauf folgte eine viel benutzte Monographie von Lommel[4]). Von diesem Zeitpunkt an schwillt die Literatur über die Besselschen Funktionen gewaltig an; während C. Neumann in seiner Schrift neun Abhandlungen über sie angibt, nimmt das Literaturverzeichnis in der jüngsten Monographie von Nielsen[5]) 15 Seiten in Großoktav ein! Als selbständige Schriften sind noch zu erwähnen die rein theoretische von Graf und Gubler[6]) und die von Gray und Mathews[7]), welche hauptsächlich die Anwendungen in der mathematischen Physik hervorkehrt. Auch nur einen Teil der Abhandlungen, die in den letzten vierzig Jahren erschienen sind und unsere Funktionen behandeln, hier anzugeben, ist ganz unmöglich; es mag in dieser Beziehung auf das Werk von Nielsen noch einmal aufmerksam gemacht werden, das sehr eingehende und sorgfältige Literaturnachweise enthält.

Auf den Mathematiker werden die Besselschen Funktionen ihrer zahlreichen interessanten Eigenschaften und Beziehungen zu anderen Funktionen wegen stets eine große Anziehungskraft ausüben, aber auch für den Techniker gewinnen sie immer mehr an Bedeutung. Zu den schon oben erwähnten Anwendungen haben sich in den letzten Jahren noch zahlreiche andere gesellt; bei der Beugung des Lichtes und der Schwingung von Membranen spielen sie eine Rolle, in der Hydrodynamik, bei der Fortpflanzung elek-

1) Über die Besselsche Funktion. Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 2, S. 137—165. 1857.

2) Über die Besselsche Transzendente J. Journal für die reine u. angew. Math., Bd. 56, S. 189—196. 1859.

3) Theorie der Besselschen Funktionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen. Leipzig 1867. Teubner.

4) Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868. Teubner.

5) Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. Leipzig 1904. Teubner.

6) Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, 2 Hefte. Bern 1898, 1900. Wyss.

7) A treatise on Bessel functions and their applications to physics. London 1895. Macmillan & Co.

trischer Wellen längs Drähten und bei der drahtlosen Telegraphie hat man sich ihrer bedient.

So dürfte es wohl den Zielen entsprechen, die diese Sammlung von mathematisch-physikalischen Schriften sich gesteckt hat, daß die Theorie dieser Funktionen hier den Ingenieuren und Studierenden zugänglich gemacht wird.

I. Abschnitt.

Die Besselschen Funktionen erster Art.

1. Hilfsformeln. Außer den Hauptregeln der Differential- und Integralrechnung muß man beim Studium der Besselschen Funktionen eine Reihe von Beziehungen kennen, die in Zusammenhang stehen mit der sogenannten hypergeometrischen Reihe. In dieser Nummer sollen diese Formeln daher mitgeteilt werden; die Beweise findet man in dem Hauptwerk über diese Funktionen von C. F. Gauß: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. Werke, herausgeg. von der kgl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Bd. 3; diese Abhandlung ist auch ins Deutsche übersetzt worden von Heinr. Simon: Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe usw. Berlin 1888, Springer.

Es möge noch ausdrücklich bemerkt werden, daß die in dieser Nummer gegebene Zusammenstellung von Formeln beim Studium zunächst übergangen werden kann.

$$(1)\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots$$

heißt die hypergeometrische Reihe; die Größen α, β, γ, x heißen ihr erstes, zweites, drittes und viertes Element, oder es werden α, β, γ als die Parameter, x als Argument bezeichnet. Die Reihe ist konvergent für alle komplexen oder reellen Werte von x, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist; wenn eines der beiden ersten Elemente eine negative ganze Zahl $-n$ ist, so ist F eine ganze Funktion $n$ten Grades des Arguments. Es ist:

$$(2)\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = F(\beta,\alpha,\gamma,x),$$

$$(3)\qquad \frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x).$$

Für einige besondere Werte der Elemente ergeben sich die Gleichungen:

$$(4)\qquad (1-x)^{\nu} = F(-\nu,\beta,\beta,x),\qquad (\beta \text{ beliebig}).$$

$$(5)\qquad \log(1+x) = xF(1,1,2,-x),$$

wo hier wie im folgenden stets unter log der natürliche Logarithmus verstanden wird.

$$(6)\qquad \arcsin x = xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},x^2),$$

$$(7)\qquad \operatorname{arc\,tg} x = xF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},-x^2),$$

$$(8)\qquad \sin\nu x = \nu\sin x\cdot F\left(\frac{1+\nu}{2},\frac{1-\nu}{2},\frac{3}{2},\sin^2 x\right),$$

$$(9)\qquad \cos\nu x = F\left(\frac{\nu}{2},-\frac{\nu}{2},\frac{1}{2},\sin^2 x\right).$$

Die Funktion F ist eine Lösung der Differentialgleichung:

$$(10)\qquad x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} + \{(\alpha+\beta+1)x-\gamma\}\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0.$$

Wenn zwischen den Parametern, die hier stets reell angenommen werden, die Beziehung besteht, daß $\gamma-\alpha-\beta>0$ ist, so bleibt F auch für $x=1$ konvergent. Um in diesem Falle den Grenzwert von F angeben zu können, hat Gauß eine Funktion $\Pi(z)$ durch folgende Gleichung eingeführt:

$$(11)\qquad \Pi(z) = \lim_{n=\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{(1+z)(2+z)(3+z)\cdots(n+z)}n^z.$$

Für diese Funktion gelten folgende Formeln:

$$(12)\qquad \Pi(z) = z\Pi(z-1);\qquad \Pi(0)=1.$$

Bedeutet demnach n eine positive ganze Zahl, so ist:

$$(13)\qquad \Pi(z+n) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)\Pi(z)$$

und für $z=0$:

$$(13\text{a})\qquad \Pi(n) = n!$$

Für reelle Werte von z größer als -1 ist Πz positiv und

endlich; für alle negativen ganzzahligen Werte ist Πz unendlich groß; zwischen $z = -1$ und -2 ist Πz negativ, zwischen $z = -2$ und -3 positiv usw. Für negative ganzzahlige Werte von z hat demnach $\frac{1}{\Pi(z)}$ den Wert Null, d. h. es ist:

$$\frac{1}{\Pi(-n)} = 0. \tag{13b}$$

Es bestehen ferner die Gleichungen:

$$\Pi(-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}; \qquad \Pi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{14}$$

$$\Pi(-z)\,\Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi}. \tag{15}$$

$$\Pi\left(-\frac{1}{2}+z\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos z\pi}. \tag{16}$$

$$\frac{n^{nz}\,\Pi(z)\,\Pi\left(z-\frac{1}{n}\right)\Pi\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right)}{\Pi(nz)} = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}. \tag{17}$$

Speziell für $n = 2$:

$$\frac{2^{2z}\,\Pi z\,\Pi\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\Pi 2z} = \sqrt{\pi}. \tag{18}$$

Ferner setzt Gauß:

$$\Psi(z) = \frac{d\log \Pi z}{dz} = \frac{\Pi'(z)}{\Pi z}. \tag{19}$$

Diese Funktion genügt der Gleichung:

$$\Psi(z+1) = \Psi(z) + \frac{1}{z+1}. \tag{20}$$

Für ganzzahlige Werte n von z ist daher:

$$\Psi(n) = \Psi(0) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \tag{21}$$

worin $\Psi(0) = -C = -0{,}577215665$ ist; C heißt die Eulersche Konstante. Es ist:

$$\Psi(-z) - \Psi(z-1) = \pi \operatorname{cotg} \pi z. \tag{22}$$

Für negative ganzzahlige Werte von z ist $\Psi(z)$ unendlich

groß; in diesem Falle erscheint $\frac{\Psi(z)}{\Pi(z)}$ in der Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren Wert sich folgendermaßen bestimmen läßt. Es ist nach (12) und (20):

$$\frac{\Psi z}{\Pi z} = \frac{\Psi(z+1) - \frac{1}{z+1}}{\frac{1}{z+1}\Pi(z+1)} = \frac{(z+1)\left\{\Psi(z+1) - \frac{1}{z+1}\right\}}{\Pi(z+1)}$$

$$= \frac{(z+1)(z+2)\left\{\Psi(z+2) - \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+1}\right\}}{\Pi(z+2)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$= \frac{(z+1)(z+2)\cdots(z+n)\left\{\Psi(z+n) - \frac{1}{z+n} - \frac{1}{z+n-1} - \cdots \frac{1}{z+1}\right\}}{\Pi(z+n)}.$$

Setzt man hierin $z = -n$, so liefern wegen des Faktors $z+n$ alle Glieder des Zählers den Wert Null mit Ausnahme von $\frac{1}{z+n}$, und man erhält:

$$(23)\quad \frac{\Psi(-n)}{\Pi(-n)} = -(-n+1)(-n+2)\cdots(-1) = (-1)^n \Pi(n-1).$$

Mit Hilfe der Funktion Π läßt sich der Wert von $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ angeben, falls er endlich ist; nämlich:

$$(24)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)};$$

diese Formel gilt also, falls $\gamma - \alpha - \beta > 0$ ist oder falls α oder β eine negative ganze Zahl ist. Ferner läßt sich die Erklärungsgleichung von F schreiben:

$$(25)\quad F(\alpha\beta\gamma x) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha+\lambda-1)\,\Pi(\beta+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\gamma+\lambda-1)} x^\lambda.$$

Durch Differentiation nach γ folgt:

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F(\alpha\beta\gamma x)}{\partial\gamma} = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} & \frac{\Pi(\alpha+\lambda-1)\,\Pi(\beta+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\gamma+\lambda-1)} \\ & \times \{\Psi(\gamma-1) - \Psi(\gamma+\lambda-1)\}\, x^\lambda. \end{aligned}\right.$$

Aus (24) und (26) folgt die Gleichung:

$$(27)\begin{cases} \dfrac{1}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}\displaystyle\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Pi(\alpha+\lambda-1)\,\Pi(\beta+\lambda-1)\,\Psi(\gamma+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\gamma+\lambda-1)} \\ = \dfrac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}\{\Psi(\gamma-\alpha-1)+\Psi(\gamma-\beta-1) \\ \qquad -\Psi(\gamma-\alpha-\beta-1)\} \end{cases}$$

unter denselben Bedingungen, die für (24) gelten.

Das Eulersche Integral zweiter Gattung oder die Gammafunktion $\Gamma(z)$ läßt sich ebenfalls durch $\Pi(z)$ ausdrücken; es ist:

$$(28)\qquad \Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-x}x^{z-1}dx=\Pi(z-1).$$

Für das Eulersche Integral erster Gattung ergibt sich:

$$(29)\quad \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}dx=\frac{1}{2^{r+s-1}}\int_{-1}^{+1}(1+x)^{r-1}(1-x)^{s-1}dx = \frac{\Pi(r-1)\,\Pi(s-1)}{\Pi(r+s-1)}.$$

2. Die Besselsche Differentialgleichung. Die Gleichung[1]):

$$(\mathbf{1})\qquad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-\nu^2)y=0$$

wird die Besselsche Differentialgleichung genannt; es soll x eine reelle oder komplexe Variable, ν eine beliebige reelle Zahl sein.

Versucht man diese Gleichung durch ganze oder gebrochene Funktionen oder durch die elementaren Transzendenten zu lösen, so wird man sich bald von der Fruchtlosigkeit eines solchen Versuchs überzeugen. Abgesehen von einem ganz speziellen Falle, der noch später besprochen werden wird, lassen sich die durch (1) definierten Funktionen y nicht auf schon bekannte Funktionen zurückführen.

Um die Eigenschaften dieser Funktionen kennen zu lernen, wird man zunächst versuchen, y durch eine Potenzreihe von x, d. h. durch eine nach steigenden ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe darzustellen. Es sei:

1) Die durch stärkeren Druck der Nummern hervorgehobenen, besonders wichtigen Formeln sind im Anhang noch einmal zusammengestellt.

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^\lambda,$$

worin a_λ von x unabhängige Größen bedeuten. Durch Differentiation folgt:

$$y' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda a_\lambda x^{\lambda-1},$$

$$y'' = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \lambda(\lambda-1) a_\lambda x^{\lambda-2}.$$

Setzt man diese Werte in (1) ein, so ergibt sich:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}[\lambda(\lambda-1)+\lambda-\nu^2]a_\lambda x^\lambda + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda x^{\lambda+2} = 0,$$

oder wenn man λ durch $\lambda - 2$ in der letzten Summe ersetzt:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(\lambda^2-\nu^2)a_\lambda x^\lambda + \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_{\lambda-2} x^\lambda = 0,$$

oder

$$\sum_{\lambda=2}^{\infty}[(\lambda^2-\nu^2)a_\lambda + a_{\lambda-2}]x^\lambda + (1-\nu^2)a_1 x - \nu^2 a_0 = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Werte von x gelten soll, so muß der Koeffizient jeder Potenz von x in dieser Gleichung gleich Null sein, d. h. es ist:

$$(2) \qquad \begin{cases} \nu^2 a_0 = 0, \quad (1-\nu^2)a_1 = 0, \\ (\lambda^2-\nu^2)a_\lambda + a_{\lambda-2} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3 \ldots). \end{cases}$$

Daher ist entweder $\nu = 0$ oder $a_0 = 0$. Ist die erste Alternative erfüllt, so zeigt die zweite Gleichung, daß alsdann $a_1 = 0$ ist. Die folgenden Gleichungen lauten dann:

$$\lambda^2 a_\lambda + a_{\lambda-2} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3 \ldots).$$

Setzt man hierin $\lambda = 3$, so erkennt man, daß sich für a_3 der Wert Null ergibt; daraus folgt dann für $\lambda = 5$, daß ebenfalls a_5 Null ist. So fortfahrend überzeugt man sich leicht, daß alle Koeffizienten a mit ungeradem Index Null werden. Setzt man dagegen $\lambda = 2$, so folgt $a_2 = -\frac{a_0}{2^2}$; für $\lambda = 4$ folgt $a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = +\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2}$;

für $\lambda = 6$ folgt $a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$ usw. Man übersieht leicht, nach welchem Gesetze die Koeffizienten zu bilden sind und erhält für $\nu = 0$ als eine Lösung der Gleichung (1):

$$y = a_0 \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{2\lambda}}{2^{2\lambda} \cdot \lambda! \, \lambda!}.$$

Wenn aber ν nicht Null ist, so muß a_0 gleich Null gesetzt werden; es folgt dann aus der zweiten Gleichung unter (2), daß entweder $\nu = 1$ oder $a_1 = 0$ ist. Unter Annahme der ersten Alternative folgt hier aus $a_0 = 0$ ähnlich wie vorhin, daß sämtliche Koeffizienten a mit geradem Index verschwinden, und aus den Gleichungen:

$$(\lambda^2 - 1) a_\lambda + a_{\lambda-2} = 0$$

oder

$$a_\lambda = -\frac{a_{\lambda-2}}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}$$

ergibt sich:

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 4}; \quad a_5 = +\frac{a_1}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}; \quad a_7 = -\frac{a_1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \text{ usw.}$$

Auch hier erkennt man leicht, nach welchem Gesetze die Koeffizienten gebildet sind, und man erhält für $\nu = 1$ als eine Lösung von (1):

$$y = 2 \cdot a_1 \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda! \, (\lambda + 1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda+1}.$$

Wenn aber ν weder Null noch 1 ist, so sind sowohl a_0 wie a_1 gleich Null; versteht man unter n eine positive ganze Zahl und ist $\nu = n$, so erkennt man leicht, daß alsdann alle Koeffizienten a, deren Index kleiner als n ist, verschwinden; daß a_n unbestimmt bleibt, a_{n+1}, a_{n+3} und alle übrigen Koeffizienten, deren Index um eine ungerade Zahl größer als n ist, wieder verschwinden; daß dagegen alle diejenigen, deren Index um eine gerade Zahl größer als n ist, durch a_n völlig bestimmt sind; es wird:

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)^2 - n^2} = -\frac{a_n}{2 \cdot (2n + 2)},$$

$$a_{n+4} = -\frac{a_{n+2}}{(n+4)^2 - 2n^2} = +\frac{a_n}{2 \cdot 4 \, (2n+2)(2n+4)} \text{ usw.}$$

Die Lösung wird in diesem Falle lauten:

$$(3)\qquad \begin{cases} y = a_n \cdot x^n \sum\limits_0^\infty \dfrac{(-1)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2\lambda} \\ \quad = 2^n \cdot a_n \sum\limits_0^\infty \dfrac{(-1)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}. \end{cases}$$

Man sieht sofort, daß die beiden vorigen Spezialfälle in dieser Gleichung mit enthalten sind.

Wenn aber ν keine ganze Zahl ist, so müssen alle Koeffizienten a_λ verschwinden, damit (2) bestehen kann, d. h. außer der trivialen Lösung $y = 0$ gibt es keine durch eine Potenzreihe darstellbare Lösung von (1). Die Form der Lösung unter (3) führt aber zu der Vermutung, daß eine Lösung sich darbieten könnte in der Form eines Produktes von x^ν mit einer Potenzreihe, d. h. in der Form:

$$y = x^\nu \sum b_\lambda x^\lambda = \sum b_\lambda x^{\nu+\lambda}.$$

Dasselbe Verfahren wie oben führt hier zu dem Ergebnis, daß die Koeffizienten b_λ zu bestimmen sind durch das Gleichungssystem:

$$(4)\qquad \begin{cases} (2\nu+1)b_1 = 0 \\ \lambda(2\nu+\lambda)b_\lambda + b_{\lambda-2} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3 \ldots). \end{cases}$$

Man sieht hieraus, daß b_1 und daher alle Koeffizienten b mit ungeradem Index verschwinden, für die übrigen ergibt sich:

$$b_2 = -\frac{b_0}{2(2\nu+2)}; \quad b_4 = +\frac{b_0}{2\cdot 4\cdot(2\nu+2)(2\nu+4)}; \text{ usw.}$$

Das Gesetz, nach dem die Koeffizienten fortschreiten, ist leicht zu erkennen, und man erhält:

$$(5)\qquad y = 2^\nu b_0 \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\,(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}.$$

Mit Benutzung der Funktion Π läßt sich das im Nenner von (5) auftretende Produkt einfacher schreiben. Es ist nach 1. (13):

$$(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+\lambda) = \frac{\Pi(\nu+\lambda)}{\Pi(\nu)}.$$

Hiermit geht (5) über in:

$$(6)\qquad y = 2^{\nu}\Pi(\nu)b_0 \sum_{0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{1}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}.$$

Die durch (6) gegebene Funktion ist eine Lösung der allgemeinen Besselschen Differentialgleichung. Da die rechte Seite von (1) Null ist, so erkennt man leicht, daß aus jeder Lösung y eine neue Lösung entsteht, wenn man y mit einer beliebigen, von x unabhängigen Zahl multipliziert. Aus diesem Grunde ist auch:

$$(7)\qquad \begin{cases} J_{\nu}(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda}}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda} \\ \qquad = \frac{x^{\nu}}{2^{\nu}\Pi\nu}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot4\cdot(2\nu+2)(2\nu+4)} - \cdots\right\} \end{cases}$$

eine Lösung von (1); die hierdurch erklärte Funktion $J_{\nu}(x)$ heißt die Besselsche Funktion νter Ordnung von x; es wird x das Argument und ν der Parameter oder Index der Funktion genannt. In vielen Schriften wird der Parameter oben an das Funktionszeichen gesetzt: $J^{\nu}(x)$, doch ist hier die Stellung unten gewählt, um den oberen Platz für Potenzerhebungen und für die Ableitungszeichen zur Verfügung zu haben. Die Ableitung nach dem Argument $\frac{dJ_{\nu}(x)}{dx}$ soll nämlich gewöhnlich durch $J_{\nu}'(x)$, die zweite durch $J_{\nu}''(x)$ usw. bezeichnet werden; eine etwaige Differentiation nach dem Parameter wird dagegen stets in der Bruchform $\frac{dJ_{\nu}(x)}{d\nu}$ geschrieben werden.

Als Spezialfälle von (7) ergeben sich:

$$(7a)\qquad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot2} + \frac{x^4}{2\cdot4\cdot2\cdot4} - \frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot2\cdot4\cdot6} + \cdots$$

$$(7b)\qquad J_1(x) = \frac{x}{2}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot4} + \frac{x^4}{2\cdot4\cdot4\cdot6} - \frac{x^6}{2\cdot4\cdot6\cdot4\cdot6\cdot8} + \cdots\right\}.$$

Die Erklärungsgleichung läßt sich auch schreiben:

$$(8)\qquad J_{\nu}(2\sqrt{x}) = \sqrt{x}^{\nu}\cdot\sum_{0}^{\infty}\frac{(-x)^{\lambda}}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}$$

und im speziellen:

$$(8a)\qquad J_0(2\sqrt{x}) = 1 - \frac{x}{1!\,1!} + \frac{x^2}{2!\,2!} - \frac{x^3}{3!\,3!} + \cdots$$

(8b) $$J_1(2\sqrt{x}) = \sqrt{x}\left\{1 - \frac{x}{1!\,2!} + \frac{x^2}{2!\,3!} - \frac{x^3}{3!\,4!} + \cdots\right\}.$$

Durch die bisherigen Untersuchungen ist nur gezeigt worden, daß die durch (7) erklärte Funktion formal der Besselschen Differentialgleichung genügt; es ist nun aber noch zu beweisen, daß, beziehungsweise für welche Werte des Arguments, die in (7) auftretende Reihe konvergent ist. Man vergleiche mit (7) die für alle endlichen Werte von x konvergente Reihe:

$$e^{\frac{x^2}{4}} = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{2!\,2^4} + \frac{x^6}{3!\,2^6} + \ldots,$$

so erkennt man, daß für alle reellen Werte von x die einzelnen Glieder unserer Reihe abgesehen vom Vorzeichen kleiner sind als die entsprechenden der letzten Exponentialreihe, folglich wird unsere Reihe auch für alle reellen endlichen Werte des Arguments konvergent sein.

Ist x komplex, so wähle man dafür die bekannte Form:

$$x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Setzt man diesen Wert in (7) ein und benutzt den Moivreschen Lehrsatz:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha,$$

so wird nach Absonderung des Faktors $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ unsere Reihe:

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda\cos 2\lambda\alpha}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2\lambda}$$
$$+ i\sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda\sin 2\lambda\alpha}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2\lambda}.$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihen sind abgesehen vom Vorzeichen noch kleiner als die entsprechenden von (7), wenn darin x mit r vertauscht wird, also sind auch die beiden letzten Reihen für alle endlichen Werte von r und α konvergent.

Demnach hat man den Satz:

Die durch (7) gegebene Definition der Besselschen Funktionen ist für alle endlichen, reellen oder komplexen Werte des Arguments gültig.

Speziell ergibt sich:

$$J_\nu(0) = 0, \quad (\nu > 0) \quad \text{und} \quad J_0(0) = 1.$$

Das Verhalten der Funktion J für ein unbegrenzt wachsendes Argument wird später ermittelt werden. Zur Berechnung der Zahlenwerte der Besselschen Funktionen läßt sich die Reihe (7) ihrer raschen Konvergenz wegen wenigstens für kleinere Werte des Arguments bequem gebrauchen.

3. Die Besselschen Funktionen mit negativem Parameter. In der Besselschen Differentialgleichung **2.** (1) ebenso wie in dem Gleichungssystem **2.** (2) zur Bestimmung der Koeffizienten a tritt der Parameter ν nur im Quadrate auf; in der Erklärungsgleichung **2.** (7) der Besselschen Funktionen dagegen tritt er nichtquadratisch auf. Bei der Ableitung dieser Gleichung wurde stillschweigend ν positiv vorausgesetzt; es ist dies jedoch nicht notwendig, und es soll jetzt der Fall eines negativen Parameters ins Auge gefaßt werden.

Bei der Ableitung der Gleichung **2.** (7) aus der Ansatzgleichung $y = \sum b_\lambda x^{\nu+\lambda}$ spielte das Vorzeichen von ν gar keine Rolle, und man erhält daher die nämliche Gleichung, wenn man annimmt, daß ν negativ ist. Um dies äußerlich zur Erscheinung zu bringen, soll jetzt $-\nu$ an Stelle von ν gesetzt werden, man erhält alsdann:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(-\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2\lambda}. \tag{1}$$

Diese Funktion $J_{-\nu}(x)$ ist eine Lösung derselben Besselschen Differentialgleichung wie $J_\nu(x)$, da wie schon gesagt in der Differentialgleichung der Parameter nur quadratisch auftritt. Aber diese Lösung $J_{-\nu}$ ist von J_ν — in Zukunft wird der Kürze wegen das Argument x häufig weggelassen werden — im allgemeinen wesentlich verschieden; es läßt sich die eine nicht durch Multiplikation mit einer Konstanten in die andere überführen. Man erkennt dies sofort daraus, daß in den Reihen für J_ν und $J_{-\nu}$ ganz andere Potenzen auftreten, z. B. für $\nu = \frac{1}{4}$ kommen in $J_{\frac{1}{4}}$ vor die Potenzen $x^{\frac{1}{4}}$, $x^{2\frac{1}{4}}$, $x^{4\frac{1}{4}}$, ..., in $J_{-\frac{1}{4}}$, dagegen $x^{-\frac{1}{4}}$, $x^{1\frac{3}{4}}$, $x^{3\frac{3}{4}}$, ...; oder auch daraus, daß für $x = 0$ die Funktion J_ν den Wert Null, $J_{-\nu}$ dagegen den Wert Unendlich annimmt. Die

Gleichung (1) ist die Erklärungsgleichung für die Besselschen Funktionen mit negativem Parameter.

Die Besselsche Differentialgleichung wird als eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung bezeichnet und zwar linear, weil die Funktion y und ihre Ableitungen nur im ersten Grade auftreten; homogen, weil die rechte Seite Null ist; und von der zweiten Ordnung, weil die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung vorkommen. Von einer solchen Differentialgleichung ist bekannt, daß sie stets nicht mehr und nicht weniger als zwei linear unabhängige Lösungen y_1 und y_2 besitzt, d. h. Lösungen, zwischen denen keine Gleichung von der Form

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_3$$

besteht, worin c_1, c_2, c_3 von x unabhängige Größen bedeuten. Jede andere Lösung y_3 einer solchen Differentialgleichung muß aber die Form haben:

$$y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Man sagt daher, daß der Ausdruck $c_1 y_1 + c_2 y_2$ die vollständige Lösung oder das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung sei.

In unserem Falle ist also

$$y = c_1 J_\nu + c_2 J_{-\nu} \tag{2}$$

das vollständige Integral der Besselschen Differentialgleichung, wenn ν keine ganze Zahl ist.

Ist aber ν eine ganze Zahl n, so sind die Funktionen J_n und J_{-n} nicht linear unabhängig. Nämlich wegen **1.** (13b) verschwinden die ersten n Glieder in (1), und es wird daher:

$$J_{-n} = \sum_{\lambda=n}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\, \Pi(-n+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}.$$

Setzt man nun $-n+\lambda = \lambda'$ und führt λ' statt λ als Summationsbuchstaben ein, so folgt:

$$J_{-n} = \sum_{\lambda'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+\lambda'}}{\Pi(n+\lambda')\, \Pi\lambda'} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda'}$$

oder mit Weglassung des Striches:

$$J_{-n} = (-1)^n \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}$$

d. h.

(3) $$J_{-n} = (-1)^n J_n.$$

Es sind die Besselschen Funktionen mit negativem, ganzzahligem Parameter abgesehen vom Vorzeichen gleich den Besselschen Funktionen mit demselben positiven Parameter.

4. Relationen zwischen den Besselschen Funktionen verschiedener Ordnungen und ihren Ableitungen. Durch Differentiation der Erklärungsgleichung:

$$J_\nu(x) = \sum \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}$$

nach x ergibt sich:

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2} \sum \frac{(-1)^\lambda(\nu+2\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda-1};$$

zerlegt man den Zählerfaktor in die Summanden $\nu+\lambda$ und λ, so folgt mit Benutzung von 1. (12):

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2} \sum \left\{ \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda-1)} + \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\nu+\lambda)} \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda-1}.$$

Dem Pluszeichen entsprechend zerlegt man die Summe auf der rechten Seite in zwei Summen; setzt man ferner λ an Stelle von $\lambda-1$ in der zweiten Summe, so findet man:

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu-1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2\lambda}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{-1}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+1+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2\lambda}.$$

Der erste Summand der zweiten Summe fällt wegen der Gleichung $\frac{1}{\Pi(-1)} = 0$ fort, so daß die zweite Summe auch mit dem Werte $\lambda = 0$ beginnt. Dann erkennt man, daß die erste Summe wieder eine Besselsche Funktion aber von der Ordnung $\nu-1$, die zweite eine solche von der Ordnung $\nu+1$ darstellt; demnach ergibt sich:

(1) $$2J_\nu' = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}.$$

Diese Gleichung ist für alle Werte des Parameters gültig; ist im speziellen $\nu = 0$, so folgt in Verbindung mit **3.** (3):

(1a) $$J_0' = -J_1,$$

eine Gleichung, die natürlich auch leicht direkt aus **2.** (7a) und (7b) abgeleitet werden kann.

Aus (1) geht hervor, daß die Differenz zweier Besselschen Funktionen, deren Indices sich um 2 unterscheiden, sich in einfacher Weise ausdrücken läßt; es ist die Frage, ob auch die Summe ein ähnliches einfaches Ergebnis liefert. Es ist:

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda-1}$$
$$+ \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+1+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda+1}.$$

Setzt man in der zweiten Summe $\lambda + 1 = \lambda'$, so erhält man:

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu-1+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda-1}$$
$$+ \sum_1^\infty \frac{(-1)^{\lambda'-1}}{\Pi(\lambda'-1)\,\Pi(\nu+\lambda')}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda'-1}.$$

Da man die untere Grenze der zweiten Summe nach **1.** (13b) auf 0 herabsetzen kann, so erhält man mit Weglassung des Striches

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \sum_0^\infty \left\{\frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu-1+\lambda)} - \frac{(-1)^\lambda}{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\nu+\lambda)}\right\}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda-1},$$

oder mit Benutzung von **1.** (12):

$$J_{\nu-1} + J_{\nu+1} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}(\nu+\lambda-\lambda)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda-1}$$
$$= \nu\sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda-1} = \frac{2\nu}{x}\cdot J_\nu$$

oder:

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}. \tag{2}$$

Auch diese Gleichung ist für alle positiven oder negativen Werte des Parameters gültig, und sie heißt die Rekursionsformel der Besselschen Funktionen.

Aus den beiden Fundamentalformeln (1) und (2) kann eine große Zahl anderer Formeln abgeleitet werden; so erhält man durch Addition beziehungsweise Subtraktion aus ihnen:

$$J_{\nu-1} = \frac{\nu}{x} J_\nu + J_\nu', \tag{3}$$

$$J_{\nu+1} = \frac{\nu}{x} J_\nu - J_\nu'. \tag{4}$$

Setzt man in (2) $\nu + 1$ an Stelle von ν, so wird:

$$\frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu+1} = J_\nu + J_{\nu+2};$$

eliminiert man aus (2) und dieser Gleichung $J_{\nu+1}$, so ergibt sich:

$$J_{\nu+2} = \left\{ \frac{4\nu(\nu+1)}{x^2} - 1 \right\} J_\nu - \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu-1}. \tag{5}$$

Ersetzt man hierin wieder ν durch $\nu+1$, so erhält man die Funktion $J_{\nu+3}$ durch die beiden Funktionen $J_{\nu+1}$ und J_ν ausgedrückt; substituiert man alsdann $J_{\nu+1}$ vermittelst (2) durch J_ν und $J_{\nu-1}$, so erhält man schließlich $J_{\nu+3}$ ebenfalls durch J_ν und $J_{\nu-1}$ ausgedrückt. Fährt man in dieser Weise fort, so sieht man, daß sich jede Funktion $J_{\nu+p}$, worin p eine positive ganze Zahl bedeutet, durch die beiden Funktionen J_ν und $J_{\nu-1}$ ausdrücken läßt. Durch Induktion wird man so zu der Formel geführt:

$$\left\{\begin{aligned} J_{\nu+p} &= J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\,\Pi(\nu+p-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} \\ &\quad - J_{\nu-1} \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\,\Pi(\nu+p-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die Summen auf der rechten Seite brechen von selbst wegen des Nennerfaktors $\Pi(p-2\lambda)$ resp. $\Pi(p-2\lambda-1)$ für $\lambda = \frac{p}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$ ab, je nachdem p gerade oder ungerade ist.

Um (6) zu beweisen, nehme man an, daß die Formel für einen bestimmten Wert von p richtig ist, und zeige, daß sie alsdann auch für $p+1$ richtig bleibt. Man setze zu dem Ende $\nu+1$ an Stelle von ν in (6), dann erhält man:

$$J_{\nu+p+1} = J_{\nu+1} \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda}$$
$$- J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\Pi(\nu+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}.$$

Nach (2) ist:

$$J_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x} J_\nu - J_{\nu-1};$$

setzt man diesen Wert in die letzte Gleichung ein, so wird:

$$J_{\nu+p+1} = J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\nu\,\Pi(p-\lambda)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda+1}$$
$$- J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\Pi(\nu+\lambda+1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}$$
$$- J_{\nu-1} \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda}.$$

Ersetzt man in der zweiten Summe λ durch $\lambda'-1$, so geht sie über in:

$$\sum_1 (-1)^{\lambda'-1} \frac{\Pi(p-\lambda')\Pi(\nu+p-\lambda'+1)}{\Pi(\lambda'-1)\Pi(p-2\lambda'+1)\Pi(\nu+\lambda')} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda'+1}.$$

Wegen des Nennerfaktors $\Pi(\lambda'-1)$ kann hierin Null als untere Grenze gewählt werden; läßt man ferner den Strich bei λ' weg, so lassen sich die beiden Glieder mit dem Faktor J_ν folgendermaßen zusammenfassen:

$$J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda+1)\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda+1} \times$$
$$\{\nu(p-2\lambda+1) + (\nu+p-\lambda+1)\lambda\}.$$

Die geschweifte Klammer ist $(p-\lambda+1)(\nu+\lambda)$; hiermit geht der Ausdruck über in:

$$J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda+1)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda+1)\Pi(\nu+\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda+1};$$

somit erhält man:

$$J_{\nu+p+1} = J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda+1)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda+1)\Pi(\nu+\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda+1}$$

$$- J_{\nu-1} \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\Pi(\nu+p-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda},$$

und dies ist nichts anderes als (6), wenn man darin $p+1$ an Stelle von p setzt. Da nun (6) für $p=1$ und 2 in die Gleichungen (2) und (5) übergeht, so ist (6) für alle ganzen Werte von p richtig.

Auf ähnliche Weise findet man die Gleichung:

$$(7) \quad \begin{cases} J_{\nu-p} = J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \dfrac{\Pi(p-\lambda)\Pi(\nu-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda)\Pi(\nu-p+\lambda)} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} \\ \qquad - J_{\nu+1} \sum_0 (-1)^\lambda \dfrac{\Pi(p-\lambda-1)\Pi(\nu-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(p-2\lambda-1)\Pi(\nu-p+\lambda)} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}. \end{cases}$$

Aus den Formeln (6) und (7) sieht man, daß zwischen drei beliebigen Besselschen Funktionen, deren Indices sich um ganze Zahlen unterscheiden, eine lineare Relation besteht, deren Koeffizienten ganze Funktionen des Arguments sind. Aus den Gleichungen (3) und (4) und der Besselschen Differentialgleichung erkennt man, daß statt der Besselschen Funktionen auch ihre ersten oder höheren Ableitungen in diese Relationen eintreten können.

Noch in anderer Art lassen sich aus den Grundformeln (1) und (2) allgemeinere Gleichungen ableiten.

Aus (2) folgt:

$$J_\nu = \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu+1} - J_{\nu+2}.$$

Durch Anwendung dieser Gleichung auf sich selbst erhält man:

$$J_\nu = (\nu+1)(\nu+2)\left(\frac{2}{x}\right)^2 J_{\nu+2} - 2(\nu+2)\frac{2}{x} J_{\nu+3} + J_{\nu+4}$$

$$= (\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\left(\frac{2}{x}\right)^3 J_{\nu+3} - 3(\nu+2)(\nu+3)\left(\frac{2}{x}\right)^2 J_{\nu+4}$$

$$+ 3(\nu+3)\frac{2}{x} J_{\nu+5} - J_{\nu+6}.$$

Von diesen Gleichungen wird man durch Induktion zu der Formel geführt:

$$J_\nu = \sum_0^p (-1)^\lambda \frac{\Pi p \, \Pi(\nu+p)}{\Pi\lambda \, \Pi(p-\lambda) \, \Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-\lambda} J_{\nu+p+\lambda},$$

deren Richtigkeit man durch das bei (6) angewendete Verfahren sehr leicht bestätigen kann.

Die Formel kann auch geschrieben werden:

$$(8) \quad \begin{cases} J_{\nu-p} = \sum\limits_0^p (-1)^\lambda \dfrac{\Pi p \, \Pi \nu}{\Pi\lambda \, \Pi(p-\lambda) \, \Pi(\nu-p+\lambda)} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{p-\lambda} J_{\nu+\lambda} \\ \quad = \sum\limits_0^p (-1)^{p-\lambda} \dfrac{\Pi p \, \Pi \nu}{\Pi\lambda \, \Pi(p-\lambda) \, \Pi(\nu-\lambda)} \left(\dfrac{2}{x}\right)^{\lambda} J_{\nu+p-\lambda}. \end{cases}$$

Aus (1) folgt durch Differentiation:

$$2 J_\nu'' = J_{\nu-1}' - J_{\nu+1}',$$

und wendet man hierauf (1) an:

$$4 J_\nu'' = J_{\nu-2} - J_\nu + J_{\nu+2}.$$

Durch mehrfache Wiederholung dieses Verfahrens findet man:

$$2^3 J_\nu''' = J_{\nu-3} - 3 J_{\nu-1} + 3 J_{\nu+1} - J_{\nu+3},$$

$$2^4 J_\nu^{IV} = J_{\nu-4} - 4 J_{\nu-2} + 6 J_\nu - 4 J_{\nu+2} + J_{\nu+4}$$

und hieraus durch Induktion:

$$(9) \qquad 2^p \frac{d^p J_\nu}{dx^p} = \sum_0^p (-1)^\lambda \frac{\Pi p}{\Pi\lambda \, \Pi(p-\lambda)} J_{\nu-p+2\lambda};$$

es ist wieder sehr leicht, die Richtigkeit dieser Gleichung zu beweisen.

5. Transformation der Besselschen Differentialgleichung. Es läßt sich zeigen, daß das Produkt einer beliebigen Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung und einer Lösung einer ebensolchen Differentialgleichung erster Ordnung wieder eine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung ist. Wir wollen die Richtigkeit dieses Satzes für den speziellen Fall, der uns beschäftigt, nachweisen.

Es sei y eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung; ferner sei φ eine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \qquad \varphi'(x) = p \cdot \varphi(x),$$

wo p eine willkürliche Funktion von x sei; dann wird behauptet, daß $z = \varphi \cdot y$ einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt.

Durch Differentiation folgt aus:

$$z = \varphi y, \tag{2}$$
$$z' = \varphi y' + \varphi' y$$

oder vermöge (1):

$$z' = \varphi(y' + py), \tag{3}$$

ebenso:

$$z'' = \varphi(y'' + py' + p'y) + \varphi'(y' + py),$$
$$z'' = \varphi\{y'' + 2py' + (p' + p^2)y\}. \tag{4}$$

Multipliziert man (2), (3) und (4) mit vorläufig noch unbestimmten Koeffizienten a_0, a_1 und a_2, so folgt:

$$\left\{\begin{aligned} & a_2 z'' + a_1 z' + a_0 z \\ & = \varphi\{a_2 y'' + (2pa_2 + a_1)y' + (p'a_2 + p^2 a_2 + pa_1 + a_0)y\}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Setzt man nun:

$$\left\{\begin{aligned} a_2 &= x^2, \\ 2pa_2 + a_1 &= x, \\ p'a_2 + p^2 a_2 + pa_1 + a_0 &= x^2 - \nu^2, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

so wird, wie ein Vergleich mit der Besselschen Differentialgleichung lehrt, die rechte Seite in (5) Null; setzt man die aus (6) folgenden Werte der Koeffizienten in (5) ein, so ergibt sich:

$$x^2 z'' + (x - 2px^2)z' + \{x^2 - \nu^2 + (p^2 - p')x^2 - px\}z = 0. \tag{7}$$

Wählt man nun $p = \frac{1}{2x}$, so verschwindet hierin das Glied mit z'; aus (1) folgt bei dieser Annahme $\varphi = \sqrt{x}$, und es geht (7) über in die Gleichung:

$$x^2 z'' + \{x^2 - (\nu^2 - \tfrac{1}{4})\}z = 0, \tag{8}$$

deren allgemeines Integral demnach lautet:

$$z = c_1 \sqrt{x}\, J_\nu(x) + c_2 \sqrt{x}\, J_{-\nu}(x), \tag{9}$$

sobald ν keine ganze Zahl ist.

Dividiert man (8) durch x^2, so erkennt man, daß für unendlich große Werte von x die Gleichung (8) übergeht in $z'' + z = 0$,

deren allgemeines Integral $a\sin x + b\cos x$ ist. Aus (9) folgt daher, daß für sehr große Werte von x die Funktionen J_ν und $J_{-\nu}$ sich asymptotisch den Werten:

$$(10)\qquad \begin{cases} J_\nu = \dfrac{A\sin x + B\cos x}{\sqrt{x}}, \\ J_{-\nu} = \dfrac{C\sin x + D\cos x}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

nähern, wo A, B, C und D Konstanten sind, die später ermittelt werden; ist x im speziellen reell, so konvergieren beide Funktionen gegen Null.

Setzt man andererseits p gleich einer Konstanten a, so erhält man aus (1) $\varphi = e^{ax}$ und aus (7) die Gleichung:

$$(11)\qquad x^2 z'' + x(1 - 2ax)z' + \{x^2(1 + a^2) - ax - \nu^2\} z = 0,$$

deren allgemeines Integral lautet:

$$z = c_1 e^{ax} J_\nu(x) + c_2 e^{ax} J_{-\nu}(x);$$

und wählt man im speziellen $a^2 = -1$, d. h. $a = \pm i$, so folgt:

$$(12)\qquad x^2 z'' + x(1 \mp 2ix)z' - (\pm ix + \nu^2) z = 0$$

mit dem allgemeinen Integral:

$$(13)\qquad z = c_1 e^{\pm ix} J_\nu(x) + c_2 e^{\pm ix} J_{-\nu}(x).$$

Auf diese letzte Gleichung werden wir in der nächsten Nummer wieder geführt werden.

6. Lösung der Besselschen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale. Häufig führen physikalische Probleme auf ein bestimmtes Integral, dessen Ermittelung erleichtert wird, wenn man weiß, daß es einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Dies ist immer der Fall, wenn der Integrand das Produkt der Lösungen zweier Differentialgleichungen erster Ordnung ist. Es soll jetzt gezeigt werden, in welchen Fällen man hierbei auf Besselsche Funktionen geführt wird.

Es seien φ und ψ Lösungen der Gleichungen:

$$(1)\qquad v\frac{d\varphi(v)}{dv} + (\alpha v - \beta)\varphi(v) = 0,$$

$$(2)\qquad v(v-1)\frac{d\psi(v)}{dv} + (\gamma v - \delta)\psi(v) = 0,$$

so suche man die Konstanten α, β, γ und δ so zu bestimmen, daß

$$z(x) = \int_a^b \varphi(vx)\,\psi(v)\,dv \tag{3}$$

auf Besselsche Funktionen führt. Aus (1) folgt:

$$v\,\frac{d\varphi(vx)}{dv} + (\alpha x v - \beta)\,\varphi(vx) = 0. \tag{4}$$

Ferner ist:

$$\frac{d\varphi(vx)}{dx} = v \cdot \frac{d\varphi(vx)}{d(vx)},$$

$$\frac{d\varphi(vx)}{dv} = x \cdot \frac{d\varphi(vx)}{d(vx)},$$

also:

$$x\,\frac{d\varphi}{dx} = v\,\frac{d\varphi}{dv}.$$

Mit Hilfe dieser Beziehung folgt aus (3):

$$xz' = \int_a^b v\,\frac{d\varphi(vx)}{dv}\,\psi(v)\,dv; \tag{5}$$

durch partielle Integration und Benutzung von (2) erhält man aus (5):

$$xz' = \Big[v\,\varphi(vx)\psi(v)\Big]_a^b - \int_a^b \varphi(vx)\,\psi(v)\left(1 + \frac{\gamma v - \delta}{1 - v}\right)dv$$

$$xz' = \Big[v\,\varphi(vx)\psi(v)\Big]_a^b + \int_a^b \varphi(vx)\,\psi(v)\,\frac{(1-\gamma)\,v - (1-\delta)}{1-v}\,dv. \tag{6}$$

Durch nochmalige Differentiation und nachherige Multiplikation mit x ergibt sich aus (6):

$$\begin{aligned} x^2 z'' + xz' &= \left[v^2\,\frac{d\varphi(vx)}{dv}\,\psi(v)\right]_a^b \\ &+ \int_a^b v\,\frac{d\varphi(vx)}{dv}\,\psi(v)\,\frac{(1-\gamma)\,v - (1-\delta)}{1-v}\,dv. \end{aligned} \tag{7}$$

Multipliziert man (7) und (5) mit vorläufig unbestimmten Koeffizienten $\varkappa$ und λ und addiert, so wird:

$$(8)\quad \begin{aligned} &\varkappa x^2 z'' + (\varkappa + \lambda) x z' = \varkappa \left[v^2 \frac{d\varphi(vx)}{dv} \psi(v) \right]_a^b \\ &+ \int_a^b v \frac{d\varphi(vx)}{dv} \psi(v) \frac{(\varkappa - \varkappa\gamma - \lambda) v - (\varkappa - \varkappa\delta - \lambda)}{1 - v} dv. \end{aligned}$$

Ähnlich folgt aus (6) und (3):

$$(9)\quad \begin{aligned} &\mu x z' + \varrho z = \mu \left[v \varphi(vx) \psi(v) \right]_a^b \\ &+ \int_a^b \varphi(vx) \psi(v) \frac{(\mu - \mu\gamma - \varrho) v - (\mu - \mu\delta - \varrho)}{1 - v} dv. \end{aligned}$$

Bestimmt man nun die Koeffizienten $\varkappa$ bis ϱ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varkappa(1-\gamma) - \lambda &= 0, \\ \varkappa(\delta - 1) + \lambda &= 1, \\ \mu(1-\gamma) - \varrho &= \alpha x, \\ \mu(1-\delta) - \varrho &= \beta \end{aligned}$$

und addiert (8) und (9), so fällt wegen (4) das Integral fort. Aus dem obigen Gleichungssystem folgt:

$$\varkappa = \frac{1}{\delta - \gamma}; \quad \lambda = \frac{1-\gamma}{\delta - \gamma}; \quad \mu = \frac{\alpha x - \beta}{\delta - \gamma};$$

$$\varrho = \frac{\alpha x (1-\delta) - \beta(1-\gamma)}{\delta - \gamma}.$$

Somit ergibt sich:

$$(10)\quad \begin{aligned} &x^2 z'' + (\alpha x + 2 - \beta - \gamma) x z' + \{\alpha(1-\delta) x - \beta(1-\gamma)\} z \\ &= \left[\left\{ v \frac{d\varphi(vx)}{dv} + (\alpha x - \beta) \varphi(vx) \right\} v \psi(v) \right]_a^b. \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung stimmt mit der von **5.** (12) überein, wenn man setzt:

$$\alpha = \mp 2i; \quad \delta = \tfrac{1}{2}; \quad \beta = \nu; \quad \gamma = 1 - \nu.$$

Bei dieser Annahme ergibt sich aus (1) und (2):

$$(11)\qquad \varphi(v) = e^{\pm 2iv}\cdot v^\nu;\quad \psi(v) = \frac{(1-v)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{v}}.$$

Die rechte Seite von (10) verwandelt sich mit Hilfe von (4) in $\Big[\alpha x\, v(1-v)\,\varphi(vx)\,\psi(v)\Big]_a^b$, also wegen (11) in:

$$\mp 2ix^{\nu+1}\Big[v^{\nu+\frac{1}{2}}(1-v)^{\nu+\frac{1}{2}}e^{\pm 2ivx}\Big]_a^b.$$

Nimmt man $\nu > -\frac{1}{2}$ an und setzt $a = 0$ und $b = 1$, so sieht man, daß die rechte Seite verschwindet und (10) völlig mit **5.** (12) übereinstimmt, und aus (3) und **5.** (13) ergibt sich:

$$c_1 e^{\pm ix} J_\nu(x) + c_2 e^{\pm ix} J_{-\nu}(x) = x^\nu \int_0^1 (v - v^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\pm 2ivx}\, dv.$$

Wählt man $u = 1 - 2v$ als neue Integrationsvariable, so wird

$$c_1 e^{\pm ix} J_\nu(x) + c_2 e^{\pm ix} J_{-\nu}(x) = \frac{x^\nu}{2^{2\nu}}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\pm ix(1-u)}\, du$$

oder

$$c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) = \frac{x^\nu}{2^{2\nu}}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{\mp ixu}\, du.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung für $x = 0$ verschwindet, so muß nach **3.** der Faktor c_2 gleich Null gesetzt werden. Da bei der Exponentialfunktion beide Vorzeichen gewählt werden können, so findet man:

$$c_1 J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^{2\nu}}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-ixu}\, du,$$

$$c_1' J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^{2\nu}}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{+ixu}\, du;$$

demnach durch Addition:

$$(12)\qquad c'' J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^{2\nu-1}} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xu\, du.$$

Dividiert man diese Gleichung durch x^ν und setzt alsdann $x=0$, so findet man vermöge **2.** (7) und **1.** (29):

$$\frac{c''}{2^\nu \Pi\nu} = \frac{1}{2^{2\nu-1}} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, du = \frac{2\Pi(\nu-\frac{1}{2})\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi 2\nu}.$$

Wendet man auf den Bruch **1.** (18) an, so geht er über in:

$$\frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2^{2\nu-1}\Pi\nu},$$

und man erhält:

$$c'' = \frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{2^{\nu-1}} \sqrt{\pi}.$$

Hiermit wird (12):

$$(13)\quad \begin{cases} J_\nu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \displaystyle\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xu\, du, \\ \qquad\; = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \displaystyle\int_0^1 (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xu\, du. \end{cases}$$

Setzt man hierin $u = \cos\omega$, so wird:

$$(14)\quad \begin{cases} J_\nu(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \dfrac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\, d\omega, \\ \qquad\; = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \dfrac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\, d\omega. \end{cases}$$

Durch diese Formeln hat man eine einfache Integraldarstellung der Besselschen Funktionen gewonnen, die gültig ist, sobald der Parameter $\nu > -\frac{1}{2}$ ist. Umgekehrt ist es sehr leicht, aus (14) die Reihenentwicklung **2.** (7) abzuleiten.

7. Der Parameter ist die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl. Ein wichtiger spezieller Fall tritt ein, wenn in **6.** (13)

$\nu = \frac{1}{2}$ gesetzt wird. Alsdann läßt sich die Integration ausführen, und man erhält:

$$(1) \qquad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x.$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$(2) \qquad J'_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{2x \cos x - \sin x}{2x}.$$

Aus **4.** (3) erhält man daher:

$$(3) \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x.$$

Bedeutet n eine positive ganze Zahl, und setzt man in **4.** (6) $p = n$ und $\nu = \frac{1}{2}$, so ergibt sich mit den Gleichungen (1) und (3):

$$(4) \qquad J_{n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(n-\lambda)\,\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(n-2\lambda)\,\Pi(\lambda-\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(n-\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\,\Pi(n-2\lambda-1)\,\Pi(\lambda+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda-1}.$$

Da in dieser Formel die Summen für $\lambda = \frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ von selbst abbrechen, so erkennt man: **Die Besselschen Funktionen, deren Parameter die Hälften ungerader ganzer Zahlen sind, enthalten keine höheren Transzendenten als trigonometrische Funktionen.**

Um die Bildungsweise der in (4) auftretenden Summen besser erkennen zu können, ist es zweckmäßig, die beiden Fälle eines geraden und ungeraden n zu unterscheiden und alsdann in den Summen die Summationsordnung umzukehren. Man erhält dann:

$$(5) \qquad (-1)^n J_{2n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \sum_0^n (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(n-\lambda-\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \sum_0^n (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda-1)\,\Pi(n+\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda-1)\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(n-\lambda+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda-1}$$

und:

(6) $$(-1)^n J_{2n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \sum_0^n (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda+1)\,\Pi(n+\lambda+\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(n-\lambda+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda+1}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \sum_0^n (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n+\lambda+\frac{1}{2})}{\Pi\, 2\lambda\, \Pi(n-\lambda)\,\Pi(n-\lambda+\frac{1}{2})} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda},$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(-1)^n J_{2n+\frac{1}{2}}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \left\{1 - \frac{n(n+1)(4n^2-1)}{2!\,x^2} + \frac{(n-1)\,n(n+1)(n+2)(4n^2-1)(4n^2-9)}{4!\,x^4} - \cdots\right\}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \left\{\frac{n(2n+1)}{x} - \frac{n(n^2-1)(4n^2-1)(2n+3)}{3!\,x^3} - \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(4n^2-1)(4n^2-9)(2n+5)}{5!\,x^5} + \cdots\right\}$$

und:

$$(-1)^n J_{2n+\frac{3}{2}}(x)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \left\{\frac{(n+1)(2n+1)}{x} - \frac{n(n+1)(n+2)(4n^2-1)(2n+3)}{3!\,x^3} + \frac{(n-1)\,n\cdots(n+3)(4n^2-1)(4n^2-9)(2n+5)}{5!\,x^5} - \cdots\right\}$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \left\{1 - \frac{n(n+1)(2n+1)(2n+3)}{2!\,x^2} + \frac{(n-1)\,n(n+1)(n+2)(4n^2-1)(2n+3)(2n+5)}{4!\,x^4} - \cdots\right\}$$

Aus diesen Formeln erkennt man, daß für sehr große reelle Werte des Arguments die Funktionen den Werten

$$(-1)^n J_{2n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x,$$

$$(-1)^{n+1} J_{2n+\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x$$

sich nähern. Wie man sich leicht überzeugt, lassen sich beide Formeln zusammenfassen in:

$$(7) \qquad J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n}{2}\pi\right) \quad (x = \infty).$$

Für diese speziellen Werte des Parameters ist somit die in **5.** erwähnte Konstantenbestimmung erreicht.

8. Der Parameter ist eine ganze Zahl. Die Definition, von der Bessel bei seinen Untersuchungen ausgegangen ist, lautet:

$$(1) \qquad J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\omega - n\omega)\, d\omega.$$

Das Integral stellt indessen nur dann eine Besselsche Funktion dar, wenn der Parameter eine ganze Zahl ist.

Die Richtigkeit von (1) ist leicht zu beweisen. Durch Differentiation folgt nämlich:

$$2 J_n'(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin\omega - n\omega) \sin\omega\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\cos[x \sin\omega - (n-1)\omega] - \cos[x \sin\omega - (n+1)\omega]\}\, d\omega$$

$$= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x),$$

d. h. die Formel **4.** (1); auch der Spezialfall **4.** (1a):

$$J_0'(x) = J_1(x)$$

ist leicht als richtig nachzuweisen.



Ferner folgt aus (1):

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega - n\omega)\cos\omega\, d\omega$$
$$= \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega - n\omega)x\cos\omega\, d\omega$$
$$= \frac{2n}{x}J_n(x) + \frac{2}{\pi x}\int_0^\pi \cos(x\sin\omega - n\omega)(x\cos\omega - n)\, d\omega.$$

Der letzte Integrand ist aber das vollständige Differential von $\sin(x\sin\omega - n\omega)$, und dieser Ausdruck verschwindet an beiden Integrationsgrenzen, sobald n eine ganze Zahl ist; hieraus folgt dann die Gültigkeit von **4.** (2) für die durch das obige Integral definierten Funktionen. Da nun alle Besselschen Funktionen, deren Parameter sich um ganze Zahlen unterscheiden, aus einer von ihnen und deren ersten Ableitung sich eindeutig bestimmen lassen mit Hilfe der Formeln **4.** (1) und (2) bzw. mit Hilfe der daraus abgeleiteten **4.** (3) und (4), und da im speziellen alle Funktionen mit ganzzahligem Parameter mit Hilfe dieser Formeln aus $J_0(x)$ sich ableiten lassen, so erkennt man, daß das Integral (1) tatsächlich die Besselsche Funktion $J_n(x)$ darstellt; denn die Gültigkeit dieser Gleichung für $J_0(x)$ ergibt sich aus **6.** (14). Nach jener Gleichung und **1.** (14) ist:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\omega)\, d\omega. \tag{2}$$

Setzt man hierin $\frac{\pi}{2} - \omega$ an Stelle von ω, so folgt:

$$\begin{cases} J_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\omega)\, d\omega \\ \quad = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\omega)\, d\omega, \end{cases} \tag{3}$$

und dies ist die Definitionsgleichung (1) für $n = 0$.



9. Eine neue Form für J_ν. Man kennt noch mehrere andere Integralformen für die Besselschen Funktionen. Interessant ist eine Formel, in der unter dem Integralzeichen selbst wieder Besselsche Funktionen auftreten.

Sie lautet:

$$(1)\quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu} \frac{1}{\Pi(\nu-\mu-1)} \int_0^1 u^{\frac{\mu}{2}} (1-u)^{\nu-\mu-1} J_\mu(x\sqrt{u})\, du,$$

unter der Voraussetzung, daß $\mu > -1$ und $\nu > \mu$ ist. Die Richtigkeit von (1) läßt sich leicht zeigen; man entwickele nämlich $J_\mu(x\sqrt{u})$ nach **2.** (7) in eine Reihe, dann wird:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu} \frac{1}{\Pi(\nu-\mu-1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2\lambda}}{\Pi\lambda\, \Pi(\mu+\lambda)}$$
$$\times \int_0^1 u^{\mu+\lambda} (1-u)^{\nu-\mu-1}\, du.$$

Das hier auftretende Integral ist nach **1.** (29):

$$\frac{\Pi(\mu+\lambda)\, \Pi(\nu-\mu-1)}{\Pi(\nu+\lambda)};$$

nach Einsetzung dieses Wertes erhält man:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\Pi\lambda\, \Pi(\nu+\lambda)},$$

und dies ist gerade die Definitionsgleichung in **2.** (7).

Es läßt sich (1) umformen in:

$$(2)\quad J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu} \frac{2}{\Pi(\nu-\mu-1)} \int_0^1 u^{\mu+1} (1-u^2)^{\nu-\mu-1} J_\mu(xu)\, du.$$

$$(\nu > \mu > -1)$$

Setzt man hierin $\mu = -\frac{1}{2}$, so ergibt sich vermöge **7.** (3) die Gleichung **6.** (13).

Setzt man $\nu = \frac{1}{2}$ und $\mu = 0$, so findet man durch **7.** (1):

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} J_0(xu)\,du$$

oder:

$$\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} J_0(xu)\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\omega\, J_0(x\sin\omega)\,d\omega. \tag{3}$$

II. Abschnitt.

Die Besselschen Funktionen zweiter Art und semikonvergente Reihen.

10. Andere Integrallösungen der Besselschen Differentialgleichung. In **6.** wurde gezeigt, daß das Integral

$$z(x) = x^\nu \int_a^b (v - v^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{\pm 2ivx}\,dv$$

eine Lösung der Differentialgleichung **5.** (12) ist, deren allgemeines Integral

$$e^{\pm ix}(c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x))$$

lautet, wenn die rechte Seite der Gleichung **6.** (10) Null ist, und dies ist der Fall, wenn der Ausdruck

$$v^{\nu+\frac{1}{2}}(1-v)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{\pm 2ivx}$$

für $v = a$ und $v = b$ verschwindet. Die Nullstellen dieses Ausdrucks sind aber für $\nu > -\frac{1}{2}$ nicht nur 0 und 1, wie dort benutzt wurde, sondern wegen des dritten Faktors auch $v = \pm i\infty$, vorausgesetzt, daß x eine reelle positive Zahl oder genauer eine komplexe Zahl ist, deren reeller Bestandteil positiv ist. Setzt man daher:

$$y_\nu = e^{-ix} x^\nu \int_0^{+i\infty} (v - v^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{+2ivx}\,dv,$$

so ist y_ν eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung **2.** (1);

wählt man hierin $u = -iv$ als neue Integrationsvariable, so ergibt sich:

$$y_\nu = x^\nu e^{-ix} \int_0^\infty (iu - i^2 u^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-2ux} i\, du$$

$$= x^\nu i^{\nu + \frac{1}{2}} e^{-ix} \int_0^\infty (u - iu^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-2ux} du.$$

Nun ist:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

daher wird:

$$(1) \qquad y_\nu = x^\nu e^{-i\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} \int_0^\infty (u - iu^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-2ux} du.$$

Ganz entsprechend ergibt sich durch das andere Vorzeichen von i eine zweite Lösung:

$$(2) \qquad \bar{y}_\nu = x^\nu e^{+i\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} \int_0^\infty (u + iu^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-2ux} du.$$

Beide Integrale haben einen endlichen Wert, wie schon erwähnt wurde, wenn $\nu > -\frac{1}{2}$ und $x > 0$ ist.

Es wird nun zu untersuchen sein, in welcher Beziehung diese beiden Lösungen der Besselschen Differentialgleichung zu den Funktionen J_ν und $J_{-\nu}$ stehen; es soll zunächst geprüft werden, ob y_ν und $\bar{y}_\nu$ den in **4.** entwickelten Relationen genügen.

Aus

$$(3) \qquad \varphi_\nu = \frac{y_\nu}{x^\nu} = \int_0^\infty (u - iu^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-\left(2ux + ix - \frac{2\nu+1}{4} i\pi\right)} du$$

ergibt sich durch partielle Integration:

$$\varphi_\nu = -\frac{1}{2x}\left[(u - iu^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{-\left(2ux + ix - \frac{2\nu+1}{4} i\pi\right)}\right]_0^\infty$$

$$+ \frac{2\nu - 1}{4x} \int_0^\infty (u - iu^2)^{\nu - \frac{3}{2}} (1 - 2iu)\, e^{-\left(2ux + ix - \frac{2\nu+1}{4} i\pi\right)} du$$

Der Ausdruck vor dem Integralzeichen nimmt an der unteren Grenze den Wert Null an, sobald $\nu > \frac{1}{2}$ ist, während er an der oberen Grenze in der Form $\frac{u^{2\nu-1}}{e^{2ux}} = \frac{\infty}{\infty}$ auftritt; nach bekannter Methode ergibt sich Null als wahrer Wert dieses Bruches. Demnach folgt für $\nu > \frac{1}{2}$:

$$\varphi_\nu = \frac{2\nu - 1}{4x} \int_0^\infty (u - iu^2)^{\nu - \frac{3}{2}} (1 - 2iu) e^{-\left(2ux + ix - \frac{2\nu+1}{4} i\pi\right)} du.$$

Zieht man aus der zweiten Klammer den Faktor $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ heraus und vereinigt ihn mit dem Exponentialfaktor, so wird:

$$\varphi_\nu = \frac{2\nu - 1}{4x} \int_0^\infty (u - iu^2)^{\nu - \frac{3}{2}} (2u + i) e^{-\left(2ux + ix - \frac{2\nu-1}{4} i\pi\right)} du.$$

Durch Differentiation von (3) erkennt man, daß das letzte Integral den Wert $-\varphi'_{\nu-1}$ besitzt, so daß man erhält:

$$\varphi_\nu = -\frac{2\nu - 1}{4x} \varphi'_{\nu-1};$$

und wenn man von φ wieder zu y übergeht:

$$y_\nu = \frac{2\nu - 1}{4} \left\{ \frac{\nu - 1}{x} y_{\nu-1} - y'_{\nu-1} \right\} \qquad \left(\nu > \frac{1}{2}\right)$$

oder

$$y_{\nu+1} = \frac{2\nu + 1}{4} \left\{ \frac{\nu}{x} y_\nu - y_\nu' \right\} \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right).$$

Setzt man

$$z_\nu = \frac{2^\nu}{\Pi(\nu - \frac{1}{2})} y_\nu,$$

so ergibt sich aus der letzten Gleichung:

$$z_{\nu+1} = \frac{\nu}{x} z_\nu - z_\nu' \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right). \tag{4}$$

Durch Differentiation folgt hieraus:

$$z'_{\nu+1} = -\frac{\nu}{x^2} z_\nu + \frac{\nu}{x} z'_\nu - z''_\nu;$$

da aber z_ν der Besselschen Differentialgleichung 2. (1) genügt, so kann in der letzten Gleichung z''_ν durch z'_ν und z_ν ersetzt werden, und man findet:

$$z'_{\nu+1} = \left\{1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right\} z_\nu + \frac{\nu+1}{x} z'_\nu .$$

Ersetzt man hierin z'_ν aus (4) durch z_ν und $z_{\nu+1}$, so erhält man:

$$z'_{\nu+1} + \frac{\nu+1}{x} z_{\nu+1} = z_\nu \qquad \left(\nu > -\tfrac{1}{2}\right)$$

oder:

$$(5) \qquad z_{\nu-1} = \frac{\nu}{x} z_\nu + z'_\nu \qquad \left(\nu > +\tfrac{1}{2}\right).$$

Aus der zweiten Lösung $\bar{y}_\nu$ folgen auf dieselbe Weise genau die nämlichen Gleichungen wie für y_ν; auch für $\bar{z}_\nu = \frac{2^\nu}{\Pi(\nu - \frac{1}{2})} \bar{y}_\nu$ gelten daher die Gleichungen (4) und (5); deswegen auch für $z_\nu \pm \bar{z}_\nu$. Es ergibt sich aus (4), daß jede Funktion z oder $\bar{z}$ mit beliebigem Index ν völlig bestimmt ist durch eine Funktion z oder $\bar{z}$, deren Index zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt.

Nun stellen (4) und (5) genau dieselben Beziehungen dar, wie sie in **4**. (3) und (4) für die Funktion $J_\nu(x)$ gefunden wurden. Läßt sich angeben, in welcher Beziehung die Funktionen z_ν und $\bar{z}_\nu$ für Werte des Index zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ zu den entsprechenden Funktionen J_ν stehen, so ist nach der letzten Bemerkung diese Beziehung auch für beliebige Werte des Index gewonnen.

Setzt man

$$(6) \qquad s_\nu = y_\nu + \bar{y}_\nu \quad \text{und} \quad \sigma_\nu = y_\nu - \bar{y}_\nu ,$$

so folgt aus (1) und (2):

$$(6\text{a}) \begin{cases} s_\nu = x^\nu \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \int\limits_0^\infty e^{-2ux} \left\{(u - iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} + (u + iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\} du \\[2ex] \quad - i x^\nu \sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \int\limits_0^\infty e^{-2ux} \left\{(u - iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} - (u + iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\} du, \\[2ex] \sigma_\nu = x^\nu \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \int\limits_0^\infty e^{-2ux} \left\{(u - iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} + (u + iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\} du \\[2ex] \quad - i x^\nu \sin\left(x - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) \int\limits_0^\infty e^{-2ux} \left\{(u - iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} + (u + iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\} du. \end{cases}$$

Führt man eine neue Integrationsvariable ω durch die Gleichung $u = \operatorname{tg} \omega$ ein, so wird:

$$(u \pm iu^2)^{\nu - \frac{1}{2}} = \operatorname{tg}^{\nu - \frac{1}{2}} \omega (1 \pm i \operatorname{tg} \omega)^{\nu - \frac{1}{2}} = \frac{\sin^{\nu - \frac{1}{2}} \omega (\cos \omega \pm i \sin \omega)^{\nu - \frac{1}{2}}}{\cos^{2\nu - 1} \omega},$$

so daß man nach der Moivreschen Formel erhält:

$$(u \pm iu^2)^{\nu - \frac{1}{2}} = \frac{\sin^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \left\{ \cos (\nu - \frac{1}{2}) \omega \pm i \sin (\nu - \frac{1}{2}) \omega \right\}}{\cos^{2\nu - 1} \omega}.$$

Hieraus folgt:

$$s_\nu = 2x^\nu \cos \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \cos (\nu - \frac{1}{2}) \omega}{\cos^{2\nu + 1} \omega} e^{-2x \operatorname{tg} \omega} d\omega$$

$$- 2x^\nu \sin \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \sin (\nu - \frac{1}{2}) \omega}{\cos^{2\nu + 1} \omega} e^{-2x \operatorname{tg} \omega} d\omega$$

oder:

$$s_\nu = 2x^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \cos \left(x - \frac{2\nu + 1}{4} \pi + \frac{2\nu - 1}{2} \omega \right)}{\cos^{2\nu + 1} \omega} e^{-2x \operatorname{tg} \omega} d\omega,$$

und führt man $\frac{\pi}{2} - \omega$ als Integrationsvariable ein:

$$(7) \qquad s_\nu = 2x^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \sin \left(x - \frac{2\nu - 1}{2} \omega \right)}{\sin^{2\nu + 1} \omega} e^{-2x \operatorname{cotg} \omega} d\omega.$$

Ganz ebenso ergibt sich:

$$(8) \qquad \sigma_\nu = 2ix^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu - \frac{1}{2}} \omega \cos \left(x - \frac{2\nu - 1}{2} \omega \right)}{\sin^{2\nu + 1} \omega} e^{-2x \operatorname{cotg} \omega} d\omega.$$

11. Neue Integraldarstellung von J_ν und die Besselsche Funktion zweiter Art. Die zuletzt entwickelten Integrale haben einen endlichen Wert, sobald $\nu > -\frac{1}{2}$ und der reelle Teil

von $x > 0$ ist; für $x = 0$ werden im allgemeinen beide Integrale unendlich. Denn alsdann verschwindet aus den Integralen die Exponentialfunktion, und die Nenner der Brüche werden an der unteren Grenze Null, und zwar von der $(2\nu + 1)$ten Ordnung. Da aber alsdann auch der Zähler des Integrals für s_ν von der ersten Ordnung Null wird, so bleibt das Integral für s_ν endlich, wenn $2\nu < 1$ ist, während das Integral für σ_ν endlich bleibt, wenn $\nu < 0$ ist. Daraus folgt, daß das Integral für s_ν an der Stelle $x = 0$ gültig bleibt, sobald $-\frac{1}{2} < \nu < +\frac{1}{2}$ ist und σ_ν für $x = 0$, sobald $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ ist. Diese Grenzwerte sollen jetzt ermittelt werden.

Setzt man in:

$$\lim_{x=0} \frac{s_\nu}{2x^\nu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(-\frac{2\nu-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu+1}\omega} d\omega$$

ε an Stelle von $\frac{1}{2} - \nu$, so bedeutet ε einen positiven echten Bruch, und man erhält:

$$\lim \frac{s_\nu}{2x^\nu} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\varepsilon}\omega \sin^{2\varepsilon-2}\omega \sin\varepsilon\omega\, d\omega.$$

Durch Benutzung von 1. (8) folgt:

$$\lim \frac{s_\nu}{2x^\nu} = \varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\varepsilon}\omega \sin^{2\varepsilon-1}\omega\, F\left(\frac{1+\varepsilon}{2}, \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2\omega\right) d\omega,$$

und wenn man $\sin^2\omega = u$ als neue Integrationsvariable einführt:

$$\lim \frac{s_\nu}{2x^\nu} = \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u^{\varepsilon-1}(1+u)^{-\frac{1+\varepsilon}{2}} F\left(\frac{1+\varepsilon}{2}, \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{3}{2}, u\right) du$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \frac{\Pi\frac{1}{2}}{\Pi\frac{\varepsilon-1}{2}\,\Pi\left(-\frac{\varepsilon+1}{2}\right)}$$

$$\times \sum_0^\infty \frac{\Pi\left(\lambda + \frac{\varepsilon-1}{2}\right)\Pi\left(\lambda - \frac{\varepsilon+1}{2}\right)}{\Pi\lambda\,\Pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 u^{\lambda+\varepsilon-1}(1-u)^{-\frac{\varepsilon+1}{2}} du.$$

Der letzte Faktor unter dem Summenzeichen ist ein Eulersches Integral erster Gattung, also nach 1. (29):

$$\int_0^1 u^{\lambda+\varepsilon-1}(1-u)^{-\frac{\varepsilon+1}{2}}\,du = \frac{\Pi(\lambda+\varepsilon-1)\,\Pi\left(-\frac{\varepsilon+1}{2}\right)}{\Pi\left(\lambda+\frac{\varepsilon-1}{2}\right)}$$

und daher:

$$\lim\frac{s_\nu}{2x^\nu} = \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\Pi\frac{1}{2}}{\Pi\frac{\varepsilon-1}{2}}\cdot\sum\frac{\Pi\left(\lambda-\frac{\varepsilon+1}{2}\right)\Pi(\lambda+\varepsilon-1)}{\Pi\lambda\,\Pi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}.$$

Die letzte Summe läßt sich nach 1. (25) durch das Zeichen der hypergeometrischen Reihe ausdrücken:

$$\lim\frac{s_\nu}{2x^\nu} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{\Pi\left(-\frac{\varepsilon+1}{2}\right)\Pi(\varepsilon-1)}{\Pi\frac{\varepsilon-1}{2}}\cdot F\left(\frac{1-\varepsilon}{2},\,\varepsilon,\,\frac{3}{2},\,1\right).$$

Man erkennt hieraus, daß die in der vorletzten Formel erhaltene Summe konvergent ist; denn die hypergeometrische Reihe ist für $x=1$ konvergent, sobald $\gamma-\alpha-\beta>0$ ist. In unserem Falle ist dieser Ausdruck $1-\frac{\varepsilon}{2}$, also positiv. Nach 1. (24) wird nunmehr:

$$\lim\frac{s_\nu}{2x^\nu} = \frac{\Pi\left(-\frac{\varepsilon+1}{2}\right)\Pi\varepsilon\,\Pi\frac{1}{2}\,\Pi\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\Pi\frac{\varepsilon-1}{2}\,\Pi\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\Pi\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Es ist nach 1. (18):

$$\frac{\Pi\varepsilon}{\Pi\frac{\varepsilon}{2}\,\Pi\frac{\varepsilon-2}{2}} = \frac{2^\varepsilon}{\sqrt{\pi}};\quad \Pi\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\varepsilon+1}{2}\right) = 2^\varepsilon\sqrt{\pi}\,\Pi(-\varepsilon)$$

und

$$\Pi\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

folglich:

$$\lim \frac{s_\nu}{2x^\nu} = 2^{2\varepsilon-2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Pi(-\varepsilon)}{\Pi(\frac{1}{2}-\varepsilon)}.$$

Führt man wieder ν statt ε ein:

$$\lim \frac{s_\nu}{2x^\nu} = \frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{2^{2\nu+1}\Pi\nu}\sqrt{\pi}. \tag{1}$$

Da nun s_ν eine Lösung derjenigen Differentialgleichung ist, deren zwei partikuläre Lösungen J_ν und $J_{-\nu}$ sind, so ist:

$$s_\nu = cJ_\nu + c'J_{-\nu}. \tag{2}$$

Nun ist nach **2.** (7) und **3.** (1):

$$\begin{cases} \lim\limits_{x=0} \dfrac{J_\nu}{x^\nu} = \dfrac{1}{2^\nu \Pi\nu} \\ \lim\limits_{x=0} \dfrac{J_{-\nu}}{x^{+\nu}} = \infty \quad (\nu>0); \quad \lim\limits_{x=0} \dfrac{J_{-\nu}}{x^\nu} = 0 \quad (\nu<0). \end{cases} \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt, daß c' Null ist, sobald $\nu > 0$ ist; daher ist:

$$s_\nu = \frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{2^\nu}\sqrt{\pi}\cdot J_\nu(x) \quad \text{für } 0<\nu<\tfrac{1}{2}, \tag{3a}$$

oder nach **10.** (7):

$$J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1}x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega\,\sin\left(x-\frac{2\nu-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu+1}\omega}\,e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega. \tag{4}$$

Ist aber $\nu<0$, so behält c seinen Wert, dagegen kann c' jeden beliebigen Wert annehmen, so daß sich auf diesem Wege nicht angeben läßt, ob alsdann s_ν neben J_ν auch noch $J_{-\nu}$ enthält. Daß indessen auch in diesem Falle (4) richtig ist, ergibt sich folgendermaßen:

Durch partielle Integration erhält man:

$$s_\nu = x^{\nu-1}\left[\frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu-1}\omega} e^{-2x\,\mathrm{cotg}\,\omega}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+\left(\nu-\frac{1}{2}\right)x^{\nu-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{3}{2}}\omega \cos\left(x - \frac{2\nu+1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu-1}\omega} e^{-2x\,\mathrm{cotg}\,\omega} d\omega$$

$$+\left(\nu-\frac{1}{2}\right)x^{\nu-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(x - \frac{2\nu-1\,\omega}{2}\right)}{\sin^{2\nu}\omega} e^{-2x\,\mathrm{cotg}\,\omega} d\omega.$$

In dieser Gleichung verschwindet das vom Integralzeichen freie Glied, sobald $\nu > \frac{1}{2}$ ist, und es bleiben die Integrale für $x = 0$ endlich, sobald $\nu < 1$ ist; also ist $\lim_{x=0}(x^{1-\nu}s_\nu)$ endlich, wenn $\frac{1}{2} < \nu < 1$ ist. Da nun $\lim_{x=0} x^{1-\nu}J_{-\nu}$ für die betreffenden Werte von ν unendlich groß wird, so enthält s_ν in diesem Falle nur die Funktion J_ν und nicht $J_{-\nu}$. Die Funktion $\frac{2^\nu}{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}\cdot s_\nu$ unterscheidet sich also auch nur um einen konstanten Faktor von J_ν und genügt der Gleichung **10.** (5):

$$z_{\nu-1} = \frac{\nu}{x} z_\nu + z_\nu' \qquad (\nu > \tfrac{1}{2}),$$

der auch die Funktion J_ν genügt; es wird also auch $s_{\nu-1}$ für $\frac{1}{2} < \nu < 1$ sich von $J_{\nu-1}$ oder, anders ausgedrückt, s_ν für $-\frac{1}{2} < \nu < 0$ sich von der Funktion J_ν nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden und demnach nicht die Funktion $J_{-\nu}$ enthalten, d. h. Gleichung (4) gilt für die Werte $-\frac{1}{2} < \nu < +\frac{1}{2}$. Sehr leicht überzeugt man sich, daß sie auch für $\nu = +\frac{1}{2}$ gilt und übergeht in Gleichung **7.** (1); auch für $\nu = -\frac{1}{2}$ ist sie richtig.

Nach dem, was in **10.** im Anschluß an Gleichung (5) gesagt worden ist, ergibt sich jetzt, daß Gleichung (4) allgemein für jeden Index größer als $-\frac{1}{2}$ gültig ist.

Die Funktion σ_ν dagegen ist ein zweites partikuläres Integral der Besselschen Differentialgleichung, das in der nächsten Nummer genauer untersucht werden soll. Während durch Gleichung (4), nämlich:

$$(4)\quad J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega$$

die am Nullpunkte endliche Lösung der Besselschen Differentialgleichung für $\nu > -\frac{1}{2}$ definiert wird, wird die Gleichung:

$$(5)\quad Y_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega$$

eine bestimmte Lösung definieren, die am Nullpunkte unendlich wird; sie heißt die Besselsche Funktion zweiter Art; zum Unterschied wird alsdann $J_\nu(x)$ als Besselsche Funktion erster Art bezeichnet. Die Funktion Y_ν ist natürlich linear aus J_ν und $J_{-\nu}$ zusammengesetzt; auch in dem speziellen Falle, daß ν eine ganze Zahl ist, bleibt (5) in Geltung und stellt auch dann eine zweite, von J_ν verschiedene Lösung der Besselschen Differentialgleichung dar; in jedem Falle stellt

$$(6)\qquad y = c_1 J_\nu + c_2 Y_\nu$$

ein vollständiges Integral der Besselschen Differentialgleichung dar; Gleichung (6) füllt also die Lücke aus, die in **3.** (2) für ganzzahlige Werte des Parameters geblieben war.

12. Näherungsformeln für unendlich große Werte des Arguments und Reihenentwicklung der Besselschen Funktionen zweiter Art. Führt man in **11.** (4) $2x\operatorname{cotg}\omega = u$ als Integrationsvariable ein, so folgt:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{1}{\Pi(\nu - \frac{1}{2})}$$

$$\times \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u^2}{4x^2}\right)^{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}} \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{2} \operatorname{arc\,cotg} \frac{u}{2x}\right) du.$$

Läßt man in diesem Ausdruck x unendlich groß werden, so wird $1 + \frac{u^2}{4x^2}$ gegen 1 und arc cotg $\frac{u}{2x}$ gegen $\frac{\pi}{2}$ konvergieren, und man erhält für unendlich große Werte des Arguments:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{\sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right)}{\Pi(\nu - \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} du,$$

also nach 1. (28):

(1) $$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) \qquad (x = \infty).$$

In Y_ν tritt nur statt des Sinus der Kosinus auf, so daß man erhält:

(2) $$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) \qquad (x = \infty).$$

Diese Gleichungen gelten zunächst nur für $\nu > -\frac{1}{2}$, da die Integrale, aus denen sie abgeleitet wurden, nur unter dieser Bedingung gelten. Jedoch können sie leicht auf beliebige reelle Werte des Parameters erweitert werden. Aus der Rekursionsformel 4. (2):

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}$$

folgt für unendlich große Werte von x:

$$J_{\nu-1} = -J_{\nu+1} \qquad (x = \infty)$$

und allgemein:

(3) $$J_{\nu-2n} = (-1)^n J_\nu, \qquad (x = \infty)$$

wenn n eine ganze Zahl bedeutet. Jede negative Zahl kann in

die Form $\nu - 2n$ gebracht werden, wenn ν zwischen 0 und 2 liegt; alsdann ergibt sich aus (1) und (3):

$$J_{\nu-2n} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos n\pi \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \tfrac{1}{2}\left\{\sin\left(x - \frac{2\nu - 4n - 1}{4}\pi\right)\right.$$

$$\left. + \sin\left(x - \frac{2\nu + 4n - 1}{4}\pi\right)\right\}.$$

Vermehrt man das letzte Argument um $2n\pi$, so folgt:

$$J_{\nu-2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{2\nu - 4n - 1}{4}\pi\right),$$

d. h. (1) ist auch für beliebige negative Parameter gültig.

Die Funktion Y_ν ist bisher nur für solche Indices definiert worden, die größer als $-\frac{1}{2}$ sind. Für diese Funktion gelten dieselben Rekursions- und Differentialformeln, die in **4.** für die Funktion J_ν abgeleitet wurden, wie dies in **10.** bewiesen worden ist. Mit Hilfe der Gleichung **4.** (7) kann demnach auch die Definition von Y_ν auf beliebige negative Indices ausgedehnt werden; dann kann ebenso wie oben gezeigt werden, daß auch Gleichung (2) für beliebige negative Indices Geltung behält.

Wie schon erwähnt wurde, muß Y_ν sich aus J_ν und $J_{-\nu}$ linear zusammensetzen; bedeuten a und b konstante Größen, so besteht die Gleichung:

$$Y_\nu(x) = aJ_{-\nu}(x) + bJ_\nu(x).$$

Da diese Gleichung für alle Werte von x, also auch für unendliche große in Geltung bleibt, so folgt aus (1) und (2):

$$\cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) = a \sin\left(x + \frac{2\nu + 1}{4}\pi\right)$$

$$+ b \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right).$$

Trennt man hierin die Variablen von den Konstanten und setzt die Koeffizienten von $\cos x$ und $\sin x$ links und rechts einzeln einander gleich, so wird:

$$\cos\frac{2\nu-1}{4}\pi = a\cos\frac{2\nu-1}{4}\pi - b\sin\frac{2\nu-1}{4}\pi,$$

$$\sin\frac{2\nu-1}{4}\pi = -a\sin\frac{2\nu-1}{4}\pi + b\cos\frac{2\nu-1}{4}\pi.$$

Löst man diese beiden Gleichungen nach a und b auf, so erhält man:

$$a = \frac{1}{\sin\nu\pi} \quad \text{und} \quad b = -\operatorname{cotg}\nu\pi.$$

Demnach ergibt sich die Gleichung:

$$(4) \qquad Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin\nu\pi} J_{-\nu}(x) - \operatorname{cotg}\nu\pi \cdot J_\nu(x).$$

Es ist also, wie am Ende der letzten Nummer behauptet wurde, Y_ν eine von $J_{-\nu}$ und J_ν im allgemeinen verschiedene Lösung der Besselschen Differentialgleichung. Nur wenn ν die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl ist, fällt in (4) das letzte Glied fort, und es wird:

$$(4\text{a}) \qquad Y_{n+\frac{1}{2}} = (-1)^n J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}.$$

Ist aber ν eine ganze Zahl n, so erscheint (4) in der Form:

$$Y_n = \frac{J_{-n} - \cos n\pi \cdot J_n}{\sin n\pi} = \frac{J_{-n} - (-1)^n J_n}{\sin n\pi},$$

also wegen **3.** (3) in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Um den wahren Wert dieser Form zu ermitteln, verfährt man nach bekannter Methode; man hat den Grenzwert von $\dfrac{\frac{\partial}{\partial\nu}\{J_{-\nu} - \cos\nu\pi J_\nu\}}{\pi\cos\nu\pi}$ für ganzzahlige Werte von ν zu bilden. Aus **2.** (7) erhält man bei Benutzung von **1.** (19):

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} &= \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{1}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda} \left\{\log\frac{x}{2} - \Psi(\nu+\lambda)\right\} \\ &= J_\nu \log\frac{x}{2} - \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda} \end{aligned}$$

und aus 3. (1):

$$\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} = \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{1}{\Pi\lambda\,\Pi(-\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2\lambda} \left\{-\log\frac{x}{2} + \right.$$

$$\left. + \Psi(-\nu+\lambda)\right\}$$

$$= -J_{-\nu}\log\frac{x}{2} + \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(-\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(-\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2\lambda},$$

Wird ν eine ganze Zahl n, so folgt:

$$Y_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{1}{\pi} \lim_{\nu=n} \left\{\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \lim_{\nu=n} \left\{\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right\},$$

also mit Rücksicht auf 3. (3):

$$-\pi Y_n(x) = 2J_n(x)\log\frac{x}{2} - \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}$$

$$-(-1)^n \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(-n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(-n+\lambda)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}.$$

Zerlegt man die zweite Summe in die beiden Teile von 0 bis $n-1$ und von n bis ∞ und wählt in der letzten Teilsumme $-n+\lambda$ als Summationsbuchstaben, so ergibt sich:

$$-\pi \cdot Y_n(x) = 2J_n(x)\log\frac{x}{2} -$$

$$-\sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(\lambda)+\Psi(n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda} -$$

$$-\sum_0^{n-1} (-1)^{\lambda+n} \frac{\Psi(-n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}.$$

Der in der letzten Summe auftretende Bruch $\frac{\Psi(-n+\lambda)}{\Pi(-n+\lambda)}$ erscheint in der unbestimmten Form $\frac{\infty}{\infty}$ und hat nach 1. (23) den wahren Wert $(-1)^{n-\lambda}\,\Pi(n-\lambda-1)$, also wird:

(6) $$Y_n(x) = -\frac{2}{\pi} J_n(x) \log\frac{x}{2} + \\ + \frac{1}{\pi}\sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(\lambda)+\Psi(n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda} \\ + \frac{1}{\pi}\sum_0^{n-1}\frac{\Pi(n-\lambda-1)}{\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}.$$

Hierdurch ist eine Entwicklung der Besselschen Funktionen zweiter Art nach steigenden Potenzen auch in dem Falle gewonnen, daß der Index eine ganze Zahl ist. Wie man aus der letzten Summe erkennt, wird $Y_n(x)$ am Nullpunkte von der n-ten Ordnung unendlich groß. Für $Y_0(x)$ fällt dieser letzte Teil fort, und es wird daher Y_0 am Nullpunkte nur logarithmisch unendlich. Man erhält nämlich:

(6a) $$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\left\{J_0(x)\log\frac{x}{2} - \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}\right\}$$

oder:

$$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\left\{J_0\log\frac{x}{2} - \left[\Psi(0) - \frac{\Psi(1)}{1!\,1!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\Psi(2)}{2!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots\right]\right\}$$

oder wegen 1. (21):

(6b) $$\frac{\pi}{2}\cdot Y_0(x) = \\ = \left[\Psi(0) - \log\frac{x}{2}\right]J_0 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1+\frac{1}{2}}{2!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

13. Relationen zwischen den Besselschen Funktionen erster und zweiter Art. Aus der Eigenschaft der Funktionen J_ν und Y_ν, Lösungen derselben Differentialgleichung zu sein, ergeben sich einige Beziehungen, die hier abgeleitet werden sollen.

Aus 5. (8) ergibt sich, daß die beiden Gleichungen bestehen:

(1a) $$\frac{d^2(\sqrt{x}J_\nu)}{dx^2} = \left(\frac{4\nu^2-1}{4x^2} - 1\right)\sqrt{x}J_\nu$$

und:

(1b) $$\frac{d^2(\sqrt{x}Y_\nu)}{dx^2} = \left(\frac{4\nu^2-1}{4x^2} - 1\right)\sqrt{x}Y_\nu.$$

Multipliziert man (1a) mit $\sqrt{x}\,Y_\nu$ und (1b) mit $\sqrt{x}\,J_\nu$ und subtrahiert, so folgt:

$$\sqrt{x}\,Y_\nu \frac{d^2\sqrt{x}\,J_\nu}{dx^2} - \sqrt{x}\,J_\nu \frac{d^2\sqrt{x}\,Y_\nu}{dx^2} = 0.$$

Wie man leicht bestätigen wird, ist die linke Seite dieser Gleichung der Differentialquotient des Ausdrucks

$$\sqrt{x}\,Y_\nu \frac{d\sqrt{x}\,J_\nu}{dx} - \sqrt{x}\,J_\nu \frac{d\sqrt{x}\,Y_\nu}{dx};$$

bedeutet c eine beliebige Konstante, so folgt demnach durch Integration:

$$\sqrt{x}\,Y_\nu \frac{d\sqrt{x}\,J_\nu}{dx} - \sqrt{x}\,J_\nu \frac{d\sqrt{x}\,Y_\nu}{dx} = c$$

oder nach Ausführung der Differentiation:

$$x(Y_\nu J_\nu' - J_\nu Y_\nu') = c.$$

Zur Bestimmung von c kann man sowohl den Wert $x = 0$ als auch $x = \infty$ benutzen. Für diesen zweiten Wert ist nach **12.** (1) und (2):

$$\left.\begin{aligned} &(2\text{a}) \qquad J_\nu' = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) = Y_\nu \\ &(2\text{b}) \qquad Y_\nu' = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) = -J_\nu \end{aligned}\right\} (x = \infty).$$

Hieraus ergibt sich $c = \frac{2}{\pi}$ oder

$$(3) \qquad Y_\nu J_\nu' - J_\nu Y_\nu' = \frac{2}{\pi x}.$$

Ersetzt man hierin J_ν' vermöge **4.** (3) durch $J_{\nu-1}$ und J_ν und macht dasselbe mit Y_ν', so findet man, daß die beiden Glieder mit dem Faktor $J_\nu Y_\nu$ sich heben, und man erhält:

$$(4) \qquad Y_\nu J_{\nu-1} - J_\nu Y_{\nu-1} = \frac{2}{\pi x}.$$

Ferner erhält man aus (3) durch Differentiation:

$$(5) \qquad Y_\nu J_\nu'' - J_\nu Y_\nu'' = -\frac{2}{\pi x^2}.$$

Durch geeignete Kombination dieser Formeln mit denen von **4.** lassen sich noch zahlreiche derartige Gleichungen aufstellen.

14. Semikonvergente Reihen für J_ν und Y_ν. Durch die Reihenentwicklungen in **2.**, **3.** und **12.** ist es möglich, die Werte der Funktionen J_ν und Y_ν für beliebige Werte des Arguments x zu berechnen. Je größer allerdings x wird, um so geringer wird die Konvergenz der betreffenden Reihen werden. Um auch für große Argumente die Funktionen bequem berechnen zu können, hat man daher versucht, Entwicklungen zu finden, die nach fallenden statt nach steigenden Potenzen von x fortschreiten. Diese Entwicklungen ergeben sich ziemlich leicht aus den Integralen der Nr. **10.**

Setzt man:

$$(1) \quad \begin{aligned} P_\nu(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \cdot \frac{(2x)^\nu}{\Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-2ux} \{ (u - iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \\ &\qquad + (u + iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \} \, du \\ Q_\nu(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \cdot \frac{(2x)^\nu}{\Pi(\nu-\frac{1}{2})} \cdot i \cdot \int_0^\infty e^{-2ux} \{ (u - iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \\ &\qquad - (u + iu^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \} \, du, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus **10.** (6a) und **11.** (3a), (4) und (5):

$$(2) \quad \begin{aligned} J_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_\nu(x) \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right. \\ &\qquad \left. + Q_\nu(x) \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\} \\ Y_\nu(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_\nu(x) \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right. \\ &\qquad \left. - Q_\nu(x) \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man in (1) $2xu$ als Integrationsvariable, so erhält man:

$$P_\nu(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} \cdot \frac{(2x)^{\nu-1}}{\Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} \left\{ \left(\frac{u}{2x} - i\frac{u^2}{4x^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} + \left(\frac{u}{2x} + i\frac{u^2}{4x^2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \right\} du$$

$$(3) \qquad = \frac{1}{2\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \right\} du.$$

Nach dem Taylorschen Satze ist nun:

$$(4) \qquad \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} + \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} = 2\sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^\lambda \frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi 2\lambda\, \Pi(\nu - 2\lambda - \frac{1}{2})} \left(\frac{u}{2x}\right)^{2\lambda} + R_{m+1},$$

wo:

$$R_{m+1} = \left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+2} \frac{(-1)^{m+1}\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(\nu-2m-\frac{5}{2})\,\Pi(2m+2)} \left\{ \left(1 - \vartheta\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-2m-\frac{5}{2}} + \left(1 + \vartheta\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-2m-\frac{5}{2}} \right\}$$

ist und ϑ einen positiven echten Bruch bedeutet.

Setzt man $\frac{u\vartheta}{2x} = \operatorname{tg}\varphi$, so wird:

$$R_{m+1} = \left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+2} \frac{(-1)^{m+1}\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(\nu-2m-\frac{5}{2})\,\Pi(2m+2)} \times \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^{\nu-2m-\frac{5}{2}} + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\nu-2m-\frac{5}{2}}}{(\cos\varphi)^{\nu-2m-\frac{5}{2}}},$$

also nach Moivres Formel:

$$R_{m+1} = 2\cdot\left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+2} \frac{(-1)^{m+1}\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(\nu-2m-\frac{5}{2})\,\Pi(2m+2)} \times \cos\left(\left(2m-\nu+\frac{5}{2}\right)\varphi\right)(\cos\varphi)^{2m-\nu+\frac{5}{2}}.$$

Ist nun $2m \geqq \nu - \frac{5}{2}$, so ist:

$$(5) \qquad |R_{m+1}| < 2 \cdot \frac{\Pi(\nu - \frac{1}{2})}{\Pi(2m+2)\,\Pi(\nu - 2m - \frac{5}{2})} \left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+2},$$

wobei der senkrechte Doppelstrich den absoluten Wert der eingeschlossenen Größe bedeutet. Führt man nun die Entwicklung (4) in (3) ein, so erhält man eine Reihe von Eulerschen Integralen, also mit Benutzung von 1. (28):

$$(6) \qquad P_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^\lambda \frac{\Pi(\nu + 2\lambda - \frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda)\,\Pi(\nu - 2\lambda - \frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^{2\lambda} + R'_{m+1},$$

wo nach (5):

$$(6\text{a}) \qquad |R'_{m+1}| < \frac{\Pi(\nu + 2m + \frac{3}{2})}{\Pi(2m+2)\,\Pi(\nu - 2m - \frac{5}{2})} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2m+2}$$

für:

$$2m > \nu - \tfrac{5}{2}.$$

In ausführlicher Schreibweise lautet (6):

$$P_\nu(x) = 1 - \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)}{2!\,(8x)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1^2)\cdots(4\nu^2 - 7^2)}{4!\,(8x)^4} - \cdots$$

und speziell:

$$(6\text{b}) \qquad P_0(x) = 1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4!\,(8x)^4} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdots 11^2}{6!\,(8x)^6} + \cdots.$$

Auf ähnliche Weise findet man:

$$Q_\nu(x) = \frac{i}{2\Pi(\nu - \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left\{ \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right\} du.$$

Nun ist:

$$i \left\{ \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= 2 \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^\lambda \frac{\Pi(\nu - \frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda + 1)\,\Pi(\nu - 2\lambda - \frac{3}{2})} \left(\frac{u}{2x}\right)^{2\lambda+1} + S_{m+1},$$

wo

$$S_{m+1} = \left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+3} \frac{(-1)^{m+1}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(2m+3)\,\Pi(\nu-2m-\frac{7}{2})} \left\{\left(1-\vartheta'\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-2m-\frac{7}{2}} + \left(1+\vartheta'\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-2m-\frac{7}{2}}\right\}.$$

Setzt man hier $\frac{u\vartheta'}{2x} = \operatorname{tg}\psi$, so ergibt sich wie oben:

$$|S_{m+1}| < 2\,\frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(2m+3)\,\Pi(\nu-2m-\frac{7}{2})}\cdot\left(\frac{u}{2x}\right)^{2m+3},$$

sobald $2m > \nu - \frac{7}{2}$ ist; hieraus folgt:

$$(7)\quad Q_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{m}(-1)^\lambda \frac{\Pi(\nu+2\lambda+\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(\nu-2\lambda-\frac{3}{2})}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^{2\lambda+1} + S'_{m+1},$$

wo:

$$(7\text{a})\qquad |S'_{m+1} < \frac{\Pi(\nu+2m+\frac{5}{2})}{\Pi(2\lambda+3)\,\Pi(\nu-2m-\frac{7}{2})}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2\lambda+3}$$

für

$$2m > \nu - \tfrac{7}{2}.$$

In ausführlicher Schreibweise lautet (7):

$$Q_\nu(x) = \frac{4\nu^2-1^2}{8x} - \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)(4\nu^2-5^2)}{3!\,(8x)^3} + \frac{(4\nu^2-1^2)\cdots(4\nu^2-9^2)}{5!\,(8x)^5} - \cdots$$

und speziell:

$$(7\text{b})\qquad Q_0(x) = -\frac{1}{8x} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdots 9^2}{5!\,(8x)^5} + \cdots.$$

Durch die Formeln (6) und (7) sind Entwicklungen der Funktionen P_ν und Q_ν für positive Werte von x erhalten worden, die nach fallenden Potenzen des Arguments fortschreiten. Aber es darf in diesen Reihen die Gliederzahl nicht beliebig wachsend angenommen werden, sonst würden die Reihen divergent werden. Denn bezeichnet man das allgemeine Glied der Reihe in (6) mit $(-1)^\lambda a_\lambda$, so folgt aus (6):

$$(8)\quad \frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} = \frac{(\nu+2\lambda+\frac{1}{2})(\nu+2\lambda+\frac{3}{2})(\nu-2\lambda-\frac{1}{2})(\nu-2\lambda-\frac{3}{2})}{4x^2(2\lambda+1)(2\lambda+2)},$$

und dieser Quotient wächst bei unbegrenzt wachsendem λ selbst über alle Grenzen.

Bricht man aber die Reihe (6) bei irgendeinem Gliede a_m ab, so lehrt (6a), daß der hierbei begangene Fehler nach der positiven oder negativen Seite kleiner ist als der absolute Wert des in der Entwicklung folgenden Gliedes a_{m+1} unter der Voraussetzung, daß die Anzahl m größer ist als $\frac{2\nu-5}{4}$. Genau das Entsprechende gilt bei der Reihe für Q_ν; hier muß m größer sein als $\frac{2\nu-7}{4}$. Wegen dieser Eigenschaft können die Reihen in (6) und (7) sehr wohl zur näherungsweisen Berechnung von J_ν und Y_ν Verwendung finden; man bezeichnet sie als semikonvergente Reihen.

Nur in dem Falle, daß ν die Hälfte einer ungeraden ganzen Zahl ist, brechen die Reihen (6) und (7) von selbst ab; man erhält dann für J_ν die Summe **7.** (5) und (6), und durch $Y_{n+\frac{1}{2}}$ erhält man nach **12.** (4a) den Wert von $J_{-(n+\frac{1}{2})}$.

III. Abschnitt.

Darstellung willkürlicher Funktionen durch Besselsche Funktionen und Integrale mit Besselschen Funktionen.

15. Reihen mit Besselschen Funktionen. Aus der Tatsache, daß die Reihe für die Besselsche Funktion erster Art mit der νten Potenz der Variablen beginnt, erkennt man, daß x^ν sich formal in eine Reihe entwickeln lassen muß, die nach den Funktionen $J_\nu, J_{\nu+2}, J_{\nu+4}, \ldots$ fortschreitet; es ist eine andere Frage, ob die erhaltene Entwicklung auch konvergent ist.

Um das erste zu zeigen, schreibe man einige der Funktionen hin nach **2.** (7):

$$\begin{aligned}
J_\nu(x) &= \frac{1}{\Pi\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu - \frac{1}{\Pi 1\,\Pi(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \frac{1}{\Pi 2\,\Pi(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} - \cdots \\
J_{\nu+2}(x) &= \frac{1}{\Pi(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} - \frac{1}{\Pi 1\,\Pi(\nu+3)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} + \cdots \\
J_{\nu+4}(x) &= + \frac{1}{\Pi(\nu+4)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} - \cdots . \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es wird nun behauptet, daß eine Reihe existiert:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_0^\infty a_\lambda J_{\nu+2\lambda}.$$

Die ersten Koeffizienten lassen sich aus den obigen Reihen leicht berechnen. Es ist $a_0 = \Pi(\nu)$. Ferner folgt:

$$\frac{a_1}{\Pi(\nu+2)} - \frac{a_0}{\Pi 1\, \Pi(\nu+1)} = 0, \quad \text{also} \quad a_1 = \frac{(\nu+2)\Pi\nu}{\Pi 1}.$$

Weiter:

$$\frac{a_2}{\Pi(\nu+4)} - \frac{a_1}{\Pi 1\, \Pi(\nu+3)} + \frac{a_0}{\Pi 2\, \Pi(\nu+2)} = 0$$

oder

$$\frac{a_2}{\Pi(\nu+4)} = \frac{(\nu+2)\Pi\nu}{\Pi(\nu+3)} - \frac{\Pi\nu}{\Pi 2\, \Pi(\nu+2)} = \frac{(2\nu+4-\nu-3)\Pi\nu}{\Pi 2\, \Pi(\nu+3)}$$

$$= \frac{\Pi(\nu+1)}{\Pi 2\, \Pi(\nu+3)} \quad \text{d. h.} \quad a_2 = \frac{(\nu+4)\Pi(\nu+1)}{\Pi 2}.$$

Setzt man die Rechnung noch um ein Glied weiter fort, so findet man:

$$a_3 = \frac{(\nu+6)\Pi(\nu+2)}{\Pi 3}$$

und hieraus durch Verallgemeinerung:

$$a_\lambda = \frac{(\nu+2\lambda)\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda}.$$

Es ist zu untersuchen, ob diese Vermutung richtig ist, oder es ist die Gleichung:

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{(\nu+2\lambda)\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda} J_{\nu+2\lambda}$$

auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Ersetzt man in (1) $J_{\nu+2\lambda}$ durch die Reihe, so wird:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{(\nu+2\lambda)\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda}$$

$$\times \sum_{\mu=0}^\infty \frac{(-1)^\mu}{\Pi\mu\, \Pi(\nu+2\lambda+\mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda+2\mu}.$$

Führt man in der inneren Reihe $\lambda + \mu$ als Summationsbuchstaben ein, so wird:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\lambda)\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda} \sum_{\mu=\lambda}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu-\lambda}}{\Pi(\mu-\lambda)\Pi(\nu+\lambda+\mu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\mu}$$

und bei Vertauschung der Summationsordnung:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{(-1)^{\lambda}(\nu+2\lambda)\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\mu-\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu)},$$

und diese Gleichung ist richtig, wenn:

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu} (-1)^{\lambda} \frac{(\nu+2\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\mu-\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu)} = 0$$

(für $\mu \geqq 1$) ist. Die linke Seite zerlegt sich in:

$$\nu \sum_{0}^{\mu} (-1)^{\lambda} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\mu-\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu)} + 2\sum_{1}^{\mu} (-1)^{\lambda} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(\mu-\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu)}$$

oder:

$$\nu \sum_{0}^{\mu} (-1)^{\lambda} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\mu-\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu)} - 2\sum_{0}^{\mu-1} (-1)^{\lambda} \frac{\Pi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\mu-\lambda-1)\,\Pi(\nu+\mu+\lambda+1)}.$$

Aus 1. (15) folgt:

$$\Pi\mu\,\Pi(-\mu-1) = \frac{-\pi}{\sin\pi\mu},$$

und wenn λ eine ganze Zahl bedeutet:

$$\Pi(\mu-\lambda)\,\Pi(\lambda-\mu-1) = \frac{-\pi}{\sin(\mu-\lambda)\pi} = (-1)^{\lambda}\frac{-\pi}{\sin\mu\pi};$$

also wird:

$$(2) \qquad (-1)^{\lambda}\frac{1}{\Pi(\mu-\lambda)} = \frac{\Pi(\lambda-\mu-1)}{\Pi\mu\,\Pi(-\mu-1)}.$$

Führt man dies ein, so folgt:

$$\frac{\nu}{\Pi\mu\,\Pi(-\mu-1)}\sum_{0}^{\mu}\frac{\Pi(\lambda-\mu-1)\,\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda+\mu)}$$

$$-\frac{2}{\Pi(\mu-1)\,\Pi(-\mu)}\sum_{0}^{\mu-1}\frac{\Pi(\lambda-\mu)\,\Pi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\mu+\lambda+1)}.$$

Diese beiden Summen lassen sich bei Benutzung des Zeichens F der hypergeometrischen Reihe nach **1.** (25) schreiben:

$$\frac{\Pi\nu}{\Pi\mu\,\Pi(\nu+\mu)}F(-\mu,\nu,\nu+\mu+1,1)$$

$$-\frac{2\,\Pi\nu}{\Pi(\mu-1)\,\Pi(\nu+\mu+1)}F(-\mu+1,\nu+1,\nu+\mu+2,1),$$

also nach **1.** (24):

$$\frac{\Pi\nu\,\Pi 2\mu}{\Pi\mu\,\Pi\mu\,\Pi(\nu+2\mu)}-\frac{2\,\Pi\nu\,\Pi(2\mu-1)}{\Pi(\mu-1)\,\Pi\mu\,\Pi(\nu+2\mu)}.$$

Erweitert man den zweiten Bruch mit μ, so erkennt man, daß die Differenz wirklich Null ist; demnach ist die formale Richtigkeit von (1) bewiesen.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob und in welchem Bereich die Entwickelung (1) konvergent ist. Beim Beweise für die Konvergenz der Definitionsgleichung **2.** (7) wurde gezeigt, daß der absolute Wert sowohl des reellen als des imaginären Bestandteils von $J_\nu(x)$ für beliebige komplexe Werte von x kleiner ist als

$$\frac{1}{\Pi\nu}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu}e^{\frac{r^2}{4}},$$

worin r den absoluten Betrag von x bedeutet. Setzt man dies in (1) ein, so wird die rechte Seite kleiner als

$$e^{\frac{r^2}{4}}\sum_{0}^{\infty}\frac{\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+2\lambda-1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu+2\lambda},$$

und diese Summe ist für alle endlichen Werte von r konvergent; folglich ist auch die Reihe (1) für alle endlichen Werte von x konvergent.

Läßt eine Funktion $f(x)$ sich in eine Potenzreihe von x entwickeln, so kann an Stelle der Potenzen die Entwicklung (1) treten; die entstandene Doppelsumme kann man dann nach den Besselschen Funktionen ordnen und erhält so für die beliebige Funktion $f(x)$ eine nach Besselschen Funktionen fortschreitende Entwicklung, die in demselben Bereich konvergent ist wie die Potenzentwicklung. Der allgemeine Beweis dieses Satzes würde zu weit führen; in den folgenden Beispielen kann er nach obigem Muster leicht durchgeführt werden.

Aus (1) folgt durch Spezialisierung von ν:

$$(3)\qquad \begin{cases} 1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots \\ x = 2\{J_1(x) + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \cdots\} \\ x^2 = 8\{J_2(x) + 4J_4(x) + 9J_6(x) + \cdots\} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

$$\sqrt{2x} = \sum \frac{(4\lambda+1)\,\Pi(\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda} J_{2\lambda+\frac{1}{2}}(x),$$

oder mit Hilfe von 1. (18):

$$(4)\qquad \sqrt{\frac{2x}{\pi}} = \sum \frac{(4\lambda+1)\,\Pi(2\lambda)}{2^{2\lambda}\,\Pi\lambda\,\Pi\lambda} J_{2\lambda+\frac{1}{2}}(x)$$

$$= J_{\frac{1}{2}}(x) + \frac{5}{2} J_{2\frac{1}{2}}(x) + \frac{27}{8} J_{4\frac{1}{2}}(x) + \cdots.$$

Ferner ergibt sich:

$$\sin x = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{\Pi(2\nu+1)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2^{2\nu+1}}{\Pi(2\nu+1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(2\nu+2\lambda+1)\,\Pi(2\nu+\lambda)}{\Pi\lambda} J_{2\nu+2\lambda+1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2^{2\nu+1}}{\Pi(2\nu+1)} \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} \frac{(2\lambda+1)\,\Pi(\nu+\lambda)}{\Pi(\lambda-\nu)} J_{2\lambda+1}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} (2\lambda+1) J_{2\lambda+1} \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \frac{\Pi(\nu+\lambda)}{\Pi(2\nu+1)\,\Pi(\lambda-\nu)} 2^{2\nu+1}.$$

Mit Benutzung von (2) und **1.** (18) verwandelt sich die innere Summe in:

$$\sqrt{\pi}\sum_{\nu=0}^{\lambda}\frac{\Pi(\nu+\lambda)\,\Pi(\lambda-\nu-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(-\lambda-1)\,\Pi\nu\,\Pi(\nu+\frac{1}{2})} = 2\,F\left(\lambda+1,-\lambda,\frac{3}{2},1\right)$$

$$= \frac{2\,\Pi\frac{1}{2}\,\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})\,\Pi(-\lambda-\frac{1}{2})} = \frac{\cos\lambda\pi}{\lambda+\frac{1}{2}} = (-1)^{\lambda}\frac{2}{2\lambda+1}.$$

Demnach erhält man:

$$\text{(5)}\qquad \sin x = 2\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}J_{2\lambda+1}(x).$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus mit Hilfe von **4.** (1):

$$\text{(6)}\qquad \cos x = J_0(x) + 2\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}J_{2\lambda}(x).$$

Die Formeln (5) und (6) ergeben sich unter Benutzung von Fourierschen Sätzen leicht aus **8.** (1).

Die Formeln (3)—(6) sind für alle endlichen Werte von x konvergent.

Die Ableitung der Besselschen Funktionen nach dem Index, die bei der Herleitung der Reihen für die Besselschen Funktionen zweiter Art auftrat und noch später mehrfach eine Rolle spielen wird, läßt sich ebenfalls in eine nach Besselschen Funktionen fortschreitende Reihe entwickeln. Es ist nach **12** (5):

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = J_\nu(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\Psi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}.$$

Bezeichnet man zur Abkürzung die letzte Summe mit K, so ist nach (1): $K =$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\Psi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{(\nu+2\lambda+2\mu)\,\Pi(\nu+2\lambda+\mu-1)}{\Pi\mu}J_{\nu+2\lambda+2\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\Psi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\sum_{\mu=\lambda}^{\infty}\frac{(\nu+2\mu)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu-1)}{\Pi(\mu-\lambda)}J_{\nu+2\mu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}(\nu+2\mu)J_{\nu+2\mu}\sum_{\lambda=0}^{\mu}(-1)^{\lambda}\frac{\Psi(\nu+\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)\,\Pi(\mu-\lambda)}.$$

Mit Benutzung von (2): $K =$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\nu + 2\mu}{\Pi\mu\,\Pi(-\mu-1)} J_{\nu+2\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{\Psi(\nu+\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda+\mu-1)\,\Pi(\lambda-\mu-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}.$$

Die innere Summe läßt sich durch 1. (27) summieren; sie hat den Wert:

$$\frac{\Pi(\nu+\mu-1)\,\Pi(-\mu-1)}{\Pi(\nu+\mu)\,\Pi(-\mu)} \{\Psi(\nu+\mu) + \Psi(-\mu) - \Psi(0)\};$$

somit wird:

$$K = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\mu)\,J_{\nu+2\mu}}{(\nu+\mu)\,\Pi(\mu)\,\Pi(-\mu)} \{\Psi(-\mu) + \Psi(\nu+\mu) - \Psi(0)\}.$$

Der Faktor $\Pi(-\mu)$ des Nenners ist nur für $\mu = 0$ endlich, für alle übrigen Werte von μ dagegen unendlich groß. Von $\mu = 1$ an verschwinden daher alle Glieder, die von den letzten beiden Summanden der geschweiften Klammer herrühren; mit Hilfe des Wertes $\frac{\Psi(-\mu)}{\Pi(-\mu)} = (-1)^{\mu}\,\Pi(\mu-1)$ erhält man schließlich:

$$K = \Psi(\nu)\,J_\nu(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\nu+2\mu}{\mu(\nu+\mu)} J_{\nu+2\mu}.$$

Also ergibt sich:

$$(7) \quad \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = \left\{\log\frac{x}{2} - \Psi(\nu)\right\} J_\nu(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\nu+2\mu}{\mu(\nu+\mu)} J_{\nu+2\mu}.$$

Eine noch einfachere Entwicklung als (1) einer beliebigen Potenz mit Hilfe Besselscher Funktionen ergibt sich folgendermaßen:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Pi\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} - \frac{1}{\Pi 1\,\Pi(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} + \frac{1}{\Pi 2\,\Pi(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} - \cdots$$

$$\frac{x}{2} J_{\nu+1}(x) = \qquad \frac{1}{\Pi(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2} - \frac{1}{\Pi 1\,\Pi(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} + \cdots$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2} J_{\nu+2}(x) = \qquad \frac{1}{\Pi(\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+4} - \cdots$$

$$\vdots$$

Multipliziert man diese Reihen mit gewissen Koeffizienten $b_0, b_1, b_2, \ldots$ und addiert sämtliche Reihen, so können diese Koeffizienten so bestimmt werden, daß außer $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$ alle Potenzen rechts verschwinden, und daß man erhält:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_0^\infty b_\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda J_{\nu+\lambda}.$$

Wie man aus obigen Gleichungen sofort sieht, ist:

$$b_0 = \Pi\nu; \quad b_1 = b_0; \quad b_2 = \frac{b_0}{\Pi 2}; \quad b_3 = \frac{b_0}{\Pi 3} \quad \text{usw.}$$

Durch Induktion findet man:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_0^\infty \frac{\Pi\nu}{\Pi\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda J_{\nu+\lambda}. \tag{8}$$

Um die Richtigkeit dieser Gleichung zu zeigen, ersetzt man $J_{\nu+\lambda}$ durch die Reihe und findet:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{\Pi\nu}{\Pi\lambda} \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda+2k}}{\Pi k\, \Pi(\nu+\lambda+k)}.$$

Führt man hierin $\lambda + k$ an Stelle von k als Summationsbuchstaben ein, so ergibt sich:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{\lambda=0}^\infty \frac{\Pi\nu}{\Pi\lambda} \sum_{k=\lambda}^\infty (-1)^{k-\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Pi(k-\lambda)\, \Pi(\nu+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{\Pi\nu}{\Pi(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \sum_{\lambda=0}^k (-1)^\lambda \frac{1}{\Pi\lambda\, \Pi(k-\lambda)}.$$

Da die innere Summe für $k = 0$ den Wert 1 hat, für alle anderen Werte von k aber verschwindet, so ergibt sich hieraus die Richtigkeit von (8).

Es kann Gleichung (8) auch geschrieben werden:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} = \sum \frac{\Pi\nu}{\Pi\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\lambda} J_{\nu+\lambda}. \tag{9}$$

16. Andere Formen für die Besselschen Funktionen zweiter Art. Die Definitionsgleichung für die Besselschen Funktionen zweiter Art **12.** (4) lautete:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} J_{-\nu}(x) - \operatorname{cotg} \nu\pi \cdot J_\nu(x).$$

Setzt man hierin:

$$\nu = n + \varepsilon,$$

wo n eine positive ganze Zahl, ε einen echten Bruch bedeutet, so wird:

$$(1) \qquad Y_{n+\varepsilon} = \frac{(-1)^n}{\sin \varepsilon\pi} J_{-n-\varepsilon} - \operatorname{cotg} \varepsilon\pi \cdot J_{n+\varepsilon}.$$

Die hierin auftretende Funktion mit negativem Index läßt sich vermittelst **4.** (7) durch zwei Funktionen mit positivem Index ersetzen. In der angegebenen Formel wähle man $p = 2n$ und $\nu = n - \varepsilon$, so geht sie über in:

$$J_{-n-\varepsilon} = J_{n-\varepsilon} \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \frac{\Pi(2n-\lambda)\,\Pi(n-\varepsilon-\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(2n-2\lambda)\,\Pi(\lambda-n-\varepsilon)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n-2\lambda}$$

$$- J_{n-\varepsilon+1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \frac{\Pi(2n-\lambda-1)\,\Pi(n-\varepsilon-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(2n-2\lambda-1)\,\Pi(\lambda-n-\varepsilon)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n-2\lambda-1}.$$

Kehrt man in beiden Summen die Summationsordnung um, so folgt:

$$(-1)^n J_{-n-\varepsilon} =$$

$$= J_{n-\varepsilon} \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\varepsilon)}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(-\varepsilon-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}$$

$$+ J_{n-\varepsilon+1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} (-1)^\lambda \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\varepsilon)}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(n-\lambda-1)\,\Pi(-\varepsilon-\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda+1}.$$

Durch Benutzung der Formel **1.** (15) gehen diese Summen über in:

$$(-1)^n J_{-n-\varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon\pi}{\pi} J_{n-\varepsilon} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\varepsilon)\,\Pi(\lambda+\varepsilon-1)}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}$$

$$- \frac{\sin \varepsilon\pi}{\pi} J_{n-\varepsilon+1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\varepsilon)\,\Pi(\lambda+\varepsilon)}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(n-\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda+1}.$$

Nach Einsetzung dieses Wertes in (1) wird:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
Y_{n+\varepsilon} &= -\operatorname{cotg}\varepsilon\pi\cdot J_{n+\varepsilon}\\
&+\frac{1}{\pi}J_{n-\varepsilon}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\varepsilon)\,\Pi(\lambda+\varepsilon-1)}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}\\
&-\frac{1}{\pi}J_{n-\varepsilon+1}\sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\varepsilon)\,\Pi(\lambda+\varepsilon)}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(n-\lambda-1)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda+1}.
\end{aligned}
$$

Setzt man im speziellen $\varepsilon=+\frac{1}{2}$, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
Y_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\pi}J_{n-\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda}\\
&-\frac{1}{\pi}J_{n+\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(\lambda+\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(n-\lambda-1)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda+1},
\end{aligned}
$$

und wenn $J_{n-\frac{1}{2}}$ durch $J_{n+\frac{1}{2}}$ und $J'_{n+\frac{1}{2}}$ vermittelst **4.** (3) ersetzt wird:

$$
\begin{aligned}
Y_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{\pi}J_{n+\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda+\frac{1}{2})\,\Pi(\lambda+\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda+1}\\
&+\frac{1}{\pi}J'_{n+\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi 2\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{2\lambda},
\end{aligned}
$$

oder nach **1.** (18):

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
\sqrt{\pi}\,Y_{n+\frac{1}{2}} &= J_{n+\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{1}{x}\right)^{2\lambda+1}\\
&+J'_{n+\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{1}{x}\right)^{2\lambda}.
\end{aligned}
$$

Setzt man in (2) dagegen $\varepsilon=0$, so tritt das erste Glied rechts zusammen mit dem ersten Summanden in unbestimmter Form auf; diese Glieder lauten nämlich:

$$
-\operatorname{cotg}\varepsilon\pi\cdot J_{n+\varepsilon}+\frac{\Pi(-\varepsilon)\,\Pi(\varepsilon-1)}{\pi}J_{n-\varepsilon},
$$

also wegen 1. (15):

$$\frac{-\cos\varepsilon\pi\, J_{n+\varepsilon}+J_{n-\varepsilon}}{\sin\varepsilon\pi};$$

dieser Bruch geht für $\varepsilon = 0$ über in:

$$\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\partial J_{n+\varepsilon}}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial J_{n-\varepsilon}}{\partial\varepsilon}\right\}_{\varepsilon=0}=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\partial J_n}{\partial n},$$

und der Wert dieses Ausdrucks ist in **15.** (7) angegeben. Alle übrigen Glieder in (2) bleiben endlich und bestimmt, so daß man findet mit abermaliger Benutzung von 1. (18):

$$\begin{aligned}
Y_n = &+\frac{2}{\pi}\left\{\Psi(n)-\log\frac{x}{2}\right\}J_n+\frac{2}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{n+2\lambda}{\lambda(n+\lambda)}J_{n+2\lambda}\\
(4)\qquad &+\frac{1}{\sqrt{\pi}}J_n\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\Pi(\lambda-1)\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi(\lambda-\frac{1}{2})\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{1}{x}\right)^{2\lambda}\\
&-\frac{1}{\sqrt{\pi}}J_{n+1}\sum_{\lambda=0}^{n-1}\frac{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}{\Pi(\lambda+\frac{1}{2})\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{1}{x}\right)^{2\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Einen anderen Ausdruck erhält man durch **4.** (8); setzt man dort $\nu = -\varepsilon$ und $p = n$, so folgt:

$$J_{-n-\varepsilon}=\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^{\lambda}\frac{\Pi n\,\Pi(-\varepsilon)}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(\lambda-n-\varepsilon)}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-\lambda}J_{\lambda-\varepsilon}$$

oder mit Hilfe der schon häufig benutzten Formel 1. (15): $J_{-n-\varepsilon}=$

$$=\frac{\Pi n\,\Pi(-\varepsilon)}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^{\lambda}\frac{\sin(n-\lambda+\varepsilon)\pi\;\Pi(n+\varepsilon-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-\lambda}J_{\lambda-\varepsilon}$$

$$=(-1)^n\frac{\sin\varepsilon\pi}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi n\,\Pi(-\varepsilon)\,\Pi(n+\varepsilon-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-\lambda}J_{\lambda-\varepsilon}.$$

Hierdurch geht (1) über in: $Y_{n+\varepsilon}=$

$$=-\operatorname{cotg}\varepsilon\pi\,J_{n+\varepsilon}+\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{n}\frac{\Pi n\,\Pi(-\varepsilon)\,\Pi(n+\varepsilon-\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-\lambda}J_{\lambda-\varepsilon}$$

oder:

$$(5)\quad Y_{n+\varepsilon} = -\operatorname{cotg} \varepsilon\pi\, J_{n+\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{\Pi n\, \Pi(-\varepsilon)\, \Pi(\lambda+\varepsilon-1)}{\Pi\lambda\, \Pi(n-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\lambda} J_{n-\lambda-\varepsilon}.$$

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ergibt sich hieraus:

$$(6)\quad Y_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{\Pi n\, \Pi(\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi\lambda\, \Pi(n-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\lambda} J_{n-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

Für $\varepsilon = 0$ tritt das erste Glied auf der rechten Seite von (5) und der erste Summand des zweiten Gliedes in derselben unbestimmten Form wie oben auf, während die übrigen Summanden endlich und stetig bleiben, so daß man findet:

$$(7)\quad \begin{aligned} Y_n = \frac{2}{\pi}\left\{\Psi(n) - \log\frac{x}{2}\right\} J_n &+ \frac{2}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{n+2\lambda}{\lambda(n+\lambda)} J_{n+2\lambda} \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\Pi n}{\lambda\, \Pi(n-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\lambda} J_{n-\lambda}. \end{aligned}$$

Für $n = 0$ fällt die zweite Summe fort, und man erhält:

$$(7\text{a})\quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\Psi(0) - \log\frac{x}{2}\right\} J_0(x) + \frac{4}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda} J_{2\lambda}(x).$$

17. Integrale mit Besselschen Funktionen. Multipliziert man **4.** (3) mit x^{ν} und dividiert **4.** (4) durch x^{ν}, so erhält man:

$$(1)\quad x^{\nu} J_{\nu-1} = \nu x^{\nu-1} J_{\nu} + x^{\nu} J_{\nu}' = \frac{d(x^{\nu} J_{\nu})}{dx},$$

$$(2)\quad \frac{J_{\nu+1}}{x^{\nu}} = -\frac{d(x^{-\nu} J_{\nu})}{dx}.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\int_a^b x^{\nu} J_{\nu-1}(x)\, dx = [x^{\nu} J_{\nu}]_a^b,$$

$$\int_a^b x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\, dx = -[x^{-\nu} J_{\nu}]_a^b,$$

oder:

$$\int_a^b x^{\nu+1} J_\nu(x)\,dx = \left[x^{\nu+1} J_{\nu+1}\right]_a^b, \tag{3}$$

$$\int_a^b x^{-\nu+1} J_\nu(x)\,dx = -\left[x^{-\nu+1} J_{\nu-1}\right]_a^b. \tag{4}$$

Ganz entsprechende Formeln gelten auch für die Funktion Y_n. Tritt als Grenze Null oder Unendlich auf, so ist zu untersuchen, ob die Integrale überhaupt endlich bleiben; diese Bemerkung gilt auch für alle folgenden Integralformeln. So findet man:

$$(5)\left\{\begin{aligned} \int_0^x u^{\nu+1} J_\nu(u)\,du &= x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x), \\ \int_0^x u^{\nu+1} Y_\nu(u)\,du &= x^{\nu+1} Y_{\nu+1}(x), \end{aligned}\right\} (\nu > -1)$$

$$(6)\left\{\begin{aligned} \int_x^\infty u^{-\nu+1} J_\nu(u)\,du &= x^{-\nu+1} J_{\nu-1}(x), \\ \int_x^\infty u^{-\nu+1} Y_\nu(u)\,du &= x^{-\nu+1} Y_{\nu-1}(x). \end{aligned}\right\} (\nu > \tfrac{1}{2})$$

Hier wie bei allen folgenden Integralformeln soll der Integrationsweg ein Teil der positiven reellen Achse sein, wenigstens muß er bei allen Formeln, in denen die Grenze ∞ auftritt, dieser Linie zuletzt sich anschmiegen. Nur in der ersten, nicht in der zweiten Formel (6) kann Null als Grenze gewählt werden, und man erhält:

$$\int_0^\infty u^{-\nu+1} J_\nu(u)\,du = \frac{1}{2^{\nu-1}\Pi(\nu-1)}. \qquad (\nu > \tfrac{1}{2}) \tag{7}$$

Viel wichtigere Formeln ergeben sich durch folgende Überlegung. Aus **5.** (8), (9) in Verbindung mit **11.** (6) erhält man, daß

$$z = c_1\sqrt{x}\,J_\nu(x) + c_2\sqrt{x}\,Y_\nu$$

das allgemeine Integral von

(8) $$z'' = \left(\frac{4\nu^2-1}{4x^2} - 1\right) z = s \cdot z$$

ist. Verbindet man hiermit eine beliebige andere Differentialgleichung der Form:

(9) $$z_1'' = s_1 z_1,$$

so ergibt sich in ähnlicher Weise wie in **13.**:

$$\frac{d}{dx}\{z_1 z' - z z_1'\} = (s - s_1) z z_\nu$$

oder:

(10) $$\int_a^b (s - s_1) z z_1\, dx = [z_1 z' - z z_1']_a^b.$$

Setzt man in (10) $s_1 = \frac{4\mu^2-1}{4x^2} - 1$ und wählt Unendlich als obere Grenze der Integration, so erhält man je nach den Werten von z und z_1 mit Rücksicht auf **12.** (1) und (2) und **13.** (2a) und (2b):

(11a) $$\int_x^\infty J_\nu(u) J_\mu(u) \frac{du}{u} = \frac{1}{\nu^2-\mu^2}\left\{\frac{2}{\pi}\sin(\nu-\mu)\frac{\pi}{2} - x J_\mu J_\nu' + x J_\nu J_\mu'\right\},$$

(11b) $$\int_x^\infty Y_\nu(u) Y_\mu(u) \frac{du}{u} = \frac{1}{\nu^2-\mu^2}\left\{\frac{2}{\pi}\sin(\nu-\mu)\frac{\pi}{2} - x Y_\mu Y_\nu' + x Y_\nu Y_\mu'\right\},$$

(11c) $$\int_x^\infty J_\nu(u) Y_\mu(u) \frac{du}{u} = \frac{1}{\nu^2-\mu^2}\left\{\frac{2}{\pi}\cos(\nu-\mu)\frac{\pi}{2} - x Y_\mu J_\nu' + x J_\nu Y_\mu'\right\}.$$

In der ersten und dritten Formel kann $x = 0$ gesetzt werden, dann fließt aus (11a) und (11c):

(12) $$\int_0^\infty J_\nu(u) J_\mu(u) \frac{du}{u} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}}{\nu^2-\mu^2}, \qquad (\nu+\mu > 0)$$

$$(13) \qquad \int_0^\infty J_\nu(u)\, Y_\mu(u) \frac{du}{u} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}}{\nu^2-\mu^2}. \qquad (\nu-\mu>0)$$

Ist in den Formeln (11) und (12) $\nu=\mu$, so tritt die rechte Seite in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auf, und zwar (11c) mit Rücksicht auf **13.** (3); in bekannter Weise erhält man dann:

$$(14a) \qquad \int_x^\infty J_\nu^2(u) \frac{du}{u} = \frac{1}{2\nu}\left\{1 + x J_\nu' \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - x J_\nu \frac{\partial^2 J_\nu}{\partial x \partial \nu}\right\},$$

$$(14b) \qquad \int_x^\infty Y_\nu^2(u) \frac{du}{u} = \frac{1}{2\nu}\left\{1 + x Y_\nu' \frac{\partial Y_\nu}{\partial \nu} - x Y_\nu \frac{\partial^2 Y_\nu}{\partial x \partial \nu}\right\},$$

$$(14c) \qquad \int_x^\infty J_\nu(u)\, Y_\nu(u) \frac{du}{u} = \frac{x}{2\nu}\left\{J_\nu' \frac{\partial Y_\nu}{\partial \nu} - J_\nu \frac{\partial^2 Y_\nu}{\partial x \partial \nu}\right\}$$

$$= \frac{x}{2\nu}\left\{Y_\nu' \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} - Y_\nu \frac{\partial^2 J_\nu}{\partial x \partial \nu}\right\},$$

$$(15) \qquad \int_0^\infty J_\nu^2(u) \frac{du}{u} = \frac{1}{2\nu}. \qquad (\nu>0)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(16) \qquad \frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = V_\nu(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial Y_\nu}{\partial \nu} = W_\nu(x),$$

multipliziert man (14a) mit Y_ν, (14c) mit J_ν und subtrahiert, so folgt:

$$\int_x^\infty J_\nu(u)\left\{Y_\nu(x)\, J_\nu(u) - J_\nu(x)\, Y_\nu(u)\right\} \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2\nu}\left\{Y_\nu + x\,(J_\nu' Y_\nu - J_\nu Y_\nu')\, V_\nu\right\},$$

also nach **13.** (3):

$$(17a) \quad 2\nu \int_x^\infty J_\nu(u)\left\{Y_\nu(x) J_\nu(u) - J_\nu(u)\, Y_\nu(u)\right\} \frac{du}{u} - Y_\nu(x) = \frac{2}{\pi} V_\nu(x).$$

Ebenso ergibt sich aus (14b) und (14c):

$$(17\text{b})\quad 2\nu \int_x^\infty Y_\nu(u) \{ Y_\nu(x) J_\nu(u) - J_\nu(x) Y_\nu(u) \} \frac{du}{u} + J_\nu(x) = \frac{2}{\pi} W_\nu(x).$$

Andere Formeln findet man, wenn man in (11) erst $\mu = \nu - 1$, dann $\mu = \nu + 1$ setzt und addiert mit Rücksicht auf **4.** (2):

$$2\nu \int_x^\infty J_\nu^2(u) \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2\nu - 1} \left\{ \frac{2}{\pi} - x J_{\nu-1} J_\nu' + x J_\nu J_{\nu-1}' \right\} + \frac{1}{2\nu + 1} \left\{ \frac{2}{\pi} + x J_{\nu+1} J_\nu' - x J_\nu J_{\nu+1}' \right\}$$

oder:

$$2\nu \int_x^\infty J_\nu^2(u) \frac{du}{u^2} = \frac{x}{4\nu^2 - 1} \Big\{ \frac{8\nu}{\pi x} - J_\nu' [(2\nu + 1) J_{\nu-1} - (2\nu - 1) J_{\nu+1}] + J_\nu [(2\nu + 1) J_{\nu+1}' - (2\nu - 1) J_{\nu+1}'] \Big\}.$$

Wendet man auf die erste eckige Klammer die Formeln **4.** (1) und (2) und auf die zweite die durch Differentiation daraus folgenden:

$$2 J_\nu'' = J_{\nu-1}' - J_{\nu+1}',$$

$$\frac{2\nu}{x} J_\nu' - \frac{2\nu}{x^2} J_\nu = J_{\nu-1}' + J_{\nu+1}'$$

an, so findet man:

$$2\nu \int_x^\infty J_\nu^2(u) \frac{du}{u^2} = \frac{x}{4\nu^2 - 1} \Big\{ \frac{8\nu}{\pi x} - 4\nu (J_\nu')^2 - \frac{2\nu}{x} J_\nu J_\nu' + 4\nu J_\nu J_\nu'' + \frac{2\nu}{x} J_\nu J_\nu' - \frac{2\nu}{x^2} J_\nu^2 \Big\}$$

oder:

$$(18)\quad \frac{4\nu^2 - 1}{x} \int_x^\infty J_\nu^2(u) \frac{du}{u^2} = \frac{4}{\pi x} - \left\{ \frac{1}{x^2} J_\nu^2 + 2 (J_\nu')^2 - 2 J_\nu J_\nu'' \right\}.$$

Hierin kann J_ν'' durch J_ν' und J_ν vermöge der Besselschen Differentialgleichung ersetzt werden; so findet man:

$$\frac{4\nu^2-1}{x}\int\limits_x^\infty J_\nu^2(u)\frac{du}{u^2}$$

(19)
$$= \frac{4}{\pi x} - \left\{\frac{1}{x^2}J_\nu^2 + \frac{2}{x}J_\nu J_\nu' + 2(J_\nu')^2 + 2\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu^2\right\}$$
$$= \frac{4}{\pi x} - \left\{\left(\frac{1}{x}J_\nu + J_\nu'\right)^2 + (J_\nu')^2 + 2\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu^2\right\}.$$

Genau die entsprechende Formel gilt für Y_ν.

Man findet leicht aus (6), daß die Gleichung

$$z_2'' = \left(\frac{4\nu^2-1}{x^2} - \alpha^2\right)z_2 = s_2 z_2$$

die allgemeine Lösung

$$z_2 = c_1\sqrt{x}\,J_\nu(\alpha x) + c_2\sqrt{x}\,Y_\nu(\alpha x)$$

besitzt; wählt man in (9) $s_1 = \frac{4\nu^2-1}{x^2} - \beta^2$, so folgt aus (10):

$$(\alpha^2-\beta^2)\int\limits_a^b x\,J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx$$
$$= \left[x\left(\beta J_\nu(\alpha x)\,J_\nu'(\beta x) - \alpha J_\nu(\beta x)\,J_\nu'(\alpha x)\right)\right]_a^b,$$

wo natürlich unter $J_\nu'(\alpha x)$ die Funktion $\frac{dJ_\nu(\alpha x)}{d(\alpha x)}$ verstanden ist. Durch **4.** (4) geht diese Gleichung über in:

(20)
$$(\alpha^2-\beta^2)\int\limits_a^b x\,J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx$$
$$= \left[x\left(\alpha J_\nu(\beta x)\,J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_\nu(\alpha x)\,J_{\nu+1}(\beta x)\right)\right]_a^b$$

Die entsprechenden Gleichungen gelten natürlich für die Integrale

$$\int\limits_a^b x\,J_\nu(\alpha x)\,Y_\nu(\beta x)\,dx \quad \text{und} \quad \int\limits_a^b x\,Y_\nu(\alpha x)\,Y_\nu(\beta x)\,dx.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

(21a)
$$(\alpha^2-\beta^2)\int\limits_0^1 x\,J_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx$$
$$= \beta\,J_\nu(\alpha)\,J_\nu'(\beta) - \alpha\,J_\nu(\beta)\,J_\nu'(\alpha),$$

$$\text{(21b)}\quad (\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 x\, J_\nu(\alpha x)\, J_\nu(\beta x)\, dx = \alpha J_\nu(\beta)\, J_{\nu+1}(\alpha) - \beta\, J_\nu(\alpha)\, J_{\nu+1}(\beta), \quad (\nu>-1)$$

$$\text{(21c)}\quad (\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 x\, J_\nu(\alpha x)\, Y_\nu(\beta x)\, dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu + \alpha\, Y_\nu(\beta) J_{\nu+1}(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha)\, Y_{\nu+1}(\beta).$$

Bringt man in diesen Formeln $\alpha^2-\beta^2$ nach rechts, so tritt die rechte Seite in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auf, sobald $\beta=\alpha$ wird. Bestimmt man den wahren Wert des Ausdrucks, so erhält man:

$$\int_0^1 x J_\nu^2(\alpha x)\, dx = \frac{1}{2\alpha}\left(-\alpha J_\nu'(\alpha)\, J_{\nu+1}(\alpha) + J_\nu(\alpha) J_{\nu+1}(\alpha) + \alpha\, J_\nu(\alpha)\, J'_{\nu+1}(\alpha)\right).$$

Setzt man $\nu+1$ an Stelle von ν in **4.** (3), so findet man:

$$J'_{\nu+1} = J_\nu - \frac{\nu+1}{\alpha} J_{\nu+1}\,,$$

und unter Benutzung von **4.** (4) ergibt sich nach einfachen Umformungen:

$$\text{(22a)}\quad 2\int_0^1 u\, J_\nu^2(xu)\, du = \left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu^2(x) + (J_\nu'(x))^2, \qquad (\nu>-1)$$

$$\text{(22b)}\quad 2\int_0^1 u\, J_\nu(xu)\, Y_\nu(xu)\, du = \frac{2\nu}{\pi x^2} + \left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu(x)\, Y_\nu(x) + J_\nu'(x)\, Y_\nu'(x).$$

Noch auf andere Art gelangt man zu ähnlichen Integralformeln.

Man multipliziere die zweite der Formelgruppe **15.** (3) mit $\frac{J_\nu(x)}{x}$ und integriere von Null bis Unendlich, so erhält man:

$$\int_0^\infty J_\nu(x)\, dx = 2\sum_{\lambda=0}^{\infty}(2\lambda+1)\int_0^\infty J_{2\lambda+1}(x)\, J_\nu(x)\,\frac{dx}{x}.$$

Wendet man auf die rechte Seite (12) an, so wird:

$$(23)\qquad \int_0^\infty J_\nu(x)\,dx = \frac{4}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(2\lambda+1)\sin(2\lambda-\nu+1)\frac{\pi}{2}}{(2\lambda+1)^2-\nu^2} \qquad (\nu>-1)$$

$$= \frac{4}{\pi}\cos\frac{\nu\pi}{2}\sum_0^\infty(-1)^\lambda\frac{2\lambda+1}{(2\lambda+1)^2-\nu^2}.$$

Nun lautet eine bekannte Reihe:

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda\frac{4(2\lambda+1)\pi}{(2\lambda+1)^2\pi^2-4x^2};$$

setzt man hierin $x=\frac{\nu\pi}{2}$, so erhält man:

$$\frac{1}{\cos\frac{\nu\pi}{2}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda\frac{4}{\pi}\cdot\frac{2\lambda+1}{(2\lambda+1)^2-\nu^2},$$

folglich geht (23) über in:

$$(24)\qquad \int_0^\infty J_\nu(x)\,dx = 1. \qquad (\nu>-1)$$

Durch Anwendung von **4.** (3) folgt hieraus:

$$\int_0^\infty\left\{\frac{\nu+1}{x}J_{\nu+1}(x)+J'_{\nu+1}\right\}dx = 1 \quad \text{oder:}$$

$$(25)\qquad \int_0^\infty\frac{J_\nu(x)}{x}\,dx = \frac{1}{\nu}. \qquad (\nu>0)$$

Auch durch Benutzung der Integraldarstellung der Besselschen Funktionen lassen sich Integralformeln finden. Aus **9.** (1) folgt:

$$2^{\nu-\mu}\Pi(\nu-\mu-1)\int_0^\infty\frac{J_\nu(x)\,dx}{x^{\nu-2k+1}} =$$

$$=\int_0^\infty x^{2k-\mu-1}\,dx\int_0^1 u^{\frac{\mu}{2}}(1-u)^{\nu-\mu-1}J_\mu(x\sqrt{u})\,du;$$

durch Vertauschung der Integrationsordnung ergibt sich:

$$2^{\nu-\mu}\Pi(\nu-\mu-1)\int_0^\infty \frac{J_\nu\,dx}{x^{\nu-2k+1}} =$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{\mu}{2}}(1-u)^{\nu-\mu-1}du \int_0^\infty x^{2k-\mu-1} J_\mu(x\sqrt{u})\,dx.$$

Setzt man nun $\mu = 2k - 1$, so daß für k die Ungleichheitsbedingungen bestehen: $0 < k < \frac{\nu+1}{2}$, so findet man durch (24) für das innere Integral den Wert $\frac{1}{\sqrt{u}}$ und alsdann nach 1. (29):

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)\,dx}{x^{\nu-2k+1}} = \frac{\Pi(k-1)}{2^{\nu-2k+1}\Pi(\nu-k)}. \qquad \left(0<k<\frac{\nu+1}{2}\right)$$

Das Integral links bleibt endlich, wenn die obere Grenze für k bis auf $\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}$ heraufgesetzt und die untere Grenze für ν von -1 bis $-\frac{3}{2}$ herabgesetzt wird. Durch Benutzung der Formel (2) kann die Gültigkeit der letzten Gleichung in den erweiterten Grenzen nachgewiesen werden, und man erhält daher:

$$\text{(26)} \qquad \int_0^\infty \frac{J_\nu(x)\,dx}{x^{\nu-2k+1}} = \frac{\Pi(k-1)}{2^{\nu-2k+1}\Pi(\nu-k)} \quad \left\{\begin{matrix}\nu > -\frac{3}{2} \\ 0 < k < \frac{\nu}{2}+\frac{3}{4}\end{matrix}\right\}.$$

18. Darstellung willkürlicher Funktionen durch Besselsche Funktionen auf andere Art. In **15.** wurde die Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Besselschen Funktionen besprochen derart, daß die Parameter eine arithmetische Reihe bilden und die Argumente unverändert bleiben; bei vielen Problemen nun ist es von Wichtigkeit, Funktionen zu entwickeln nach Besselschen Funktionen derart, daß die Parameter ungeändert bleiben, die Argumente dagegen sich ändern. Der Einfach-

heit halber soll der Parameter Null nur besprochen werden, die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall ist daraus leicht zu erkennen.

Wenn eine Funktion $f(x)$, die in dem Intervall von 0 bis 1 stetig ist, in eine Reihe der Form:

$$f(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda J_0(\vartheta_\lambda x) \tag{1}$$

sich entwickeln läßt, so können die Koeffizienten a_λ dieser Entwicklung bestimmt werden, wenn die Größen ϑ_λ, durch welche sich die einzelnen Glieder unterscheiden, die positiven Nullstellen der Funktionen J_0 oder J_0' (resp. J_1), über deren Lage im 5. Abschnitt genaueres mitgeteilt werden wird, oder allgemeiner die Wurzeln der Gleichung

$$A J_0(x) + B x J_0'(x) = 0$$

sind, worin A und B beliebige Konstanten bedeuten.

Um dies zu zeigen, multipliziere man (1) mit $xJ_0(\vartheta_\mu x)$ und integriere von 0 bis 1, so erhält man:

$$\int_0^1 x f(x) J_0(\vartheta_\mu x)\, dx = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda \int_0^1 x J_0(\vartheta_\mu x) J_0(\vartheta_\lambda x)\, dx. \tag{2}$$

Sind nun ϑ_μ und ϑ_λ verschiedene Nullstellen von $J_0(x)$, so verschwindet das rechtsstehende Integral nach **17.** (21a); nur wenn $\lambda = \mu$ ist, erhält man aus **17.** (22a):

$$\int_0^1 x J_0^2(\vartheta_\mu x)\, dx = \frac{1}{2}\left[J_0'(\vartheta_\mu)\right]^2 = \frac{1}{2} J_1^2(\vartheta_\mu). \tag{3}$$

Folglich findet man aus (2) und (3):

$$\int_0^1 x f(x) J_0(\vartheta_\mu x)\, dx = \frac{1}{2} a_\mu J_1^2(\vartheta_\mu)$$

oder

$$a_\mu = \left\{2\int_0^1 x f(x) J_0(\vartheta_\mu x)\, dx\right\} : J_1^2(\vartheta_\mu). \tag{4}$$

Durch diese Gleichung lassen sich die Koeffizienten der Entwicklung (1) berechnen.

Versteht man dagegen unter ϑ_λ die Nullstellen von $J_0'(x)$ oder, was dasselbe ist, von $J_1(x)$, so verschwindet das rechts stehende Integral in (2) ebenfalls, wenn ϑ_μ und ϑ_λ verschieden sind; ist aber $\lambda = \mu$, so wird hier:

$$(5) \qquad \int_0^1 x J_0^2(\vartheta_\mu x) = \frac{1}{2} J_0^2(\vartheta_\mu),$$

und es ergibt sich demnach eine der obigen entsprechende Koeffizientenbestimmung. Jedoch ist hier folgendes noch zu beachten. Setzt man in 17. (21a) $\beta = 0$ und wählt α als Nullstelle von J', so findet man für $\nu = 0$:

$$(6) \qquad \int_0^1 x J_0(\alpha x) dx = 0;$$

multipliziert man daher (1) mit x und integriert zwischen 0 und 1, so folgt:

$$\int_0^1 x f(x) dx = 0.$$

Da nun bei beliebiger Wahl von $f(x)$ diese Gleichung im allgemeinen nicht erfüllt sein wird, so kann eine Entwicklung in der Form (1) in diesem Falle nicht stattfinden. Jedoch wird eine derartige Gleichung ermöglicht, wenn man noch einen Summanden vorschiebt, nämlich setzt:

$$(7) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_\lambda J_0(\vartheta_\lambda x).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $x J_0(\vartheta_\mu x)$ und integriert, so ergibt sich aus (5) (6) und 17. (21a) der Koeffizient a_μ, und multipliziert man mit x und integriert, so findet man aus (6):

$$\int_0^1 f(x)\, x\, dx = a_0 \int_0^1 x\, dx.$$

oder

$$a_0 = 2 \int_0^1 x f(x) dx.$$

Die Gleichung (7) geht genau in (1) über, wenn man dort die Summation mit Null statt mit Eins beginnt und unter ϑ_0 die erste Nullstelle von $J_0'(x)$, nämlich die im Nullpunkte gelegene, versteht.

Auch in dem allgemeinen Falle, daß die Größen ϑ_λ Wurzeln der Gleichung

$$AJ_0(x) + BxJ_0'(x) = 0 \tag{8}$$

sind, ist auf entsprechendem Wege die Koeffizientenbestimmung zu bewirken. Wenn α und β verschiedene Wurzeln von (8) bedeuten, so geht der Minuend der rechten Seite von **17.** (21a) für $\nu = 0$ über in:

$$-\frac{A}{B} J_0(\beta) J_0(\alpha),$$

und der Subtrahend erhält denselben Wert, also wird die rechte Seite wieder Null. Aus **17.** (22a) ergibt sich:

$$2\int_0^1 x J_0^2(\vartheta_\mu x)\,dx = J_0^2(\vartheta_\mu)\frac{A^2 + B^2\vartheta^2}{B^2\vartheta^2} = J_1^2(\vartheta_\mu)\frac{A^2+B^2\vartheta^2}{A^2},$$

und hiermit sind die nötigen Mittel zur Koeffizientenbestimmung von (1) gegeben.

19. Darstellung der hypergeometrischen Reihe durch ein Integral mit Besselschen Funktionen. Es sei:

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{J_\lambda(ux) J_\mu(u)}{u^\nu}\,du, \tag{1}$$

so folgt mit Benutzung von **6.** (4a):

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{dJ_\lambda(ux)}{du} \cdot \frac{J_\mu}{u^{\nu-1}}\,du, \tag{2}$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{d^2 J_\lambda(ux)}{du^2} \cdot \frac{J_\mu}{u^{\nu-2}}\,du. \tag{3}$$

Damit diese drei Integrale endlich sind, muß sein:

$$1 < \nu < \lambda + \mu + 1. \tag{4}$$

Aus der Differentialgleichung für die Funktion $J_\lambda(ux)$ ergibt sich vermittelst (1) bis (3):

$$(5)\qquad \varphi'' + \frac{1}{x}\varphi' - \frac{\lambda^2}{x^2}\varphi = -\int_0^\infty \frac{J_\lambda(ux) J_\mu}{u^{\nu-2}}\, du.$$

Durch partielle Integration findet man aus (2):

$$(6)\qquad \varphi' - \frac{\nu-1}{x}\varphi = -\frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{J_\lambda(ux) J'_\mu}{u^{\nu-1}}\, du,$$

entsprechend aus (3):

$$\varphi'' = \frac{\nu-2}{x}\varphi' - \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{d\,J_\lambda(ux)}{du} \cdot \frac{J'_\mu}{u^{\nu-2}}$$

und durch nochmalige partielle Integration:

$$\varphi'' = \frac{\nu-2}{x}\varphi' - \frac{\nu-2}{x^2}\int_0^\infty \frac{J_\lambda(ux) J'_\mu}{u^{\nu-1}}\, du + \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{J_\lambda(ux) J''_\mu}{u^{\nu-2}}\, du,$$

woraus mit Benutzung von (6) folgt:

$$\varphi'' = \frac{2(\nu-2)}{x}\varphi' + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{x^2}\varphi = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{J_\lambda(ux) J''_\mu}{u^{\nu-2}}\, du.$$

Aus dieser Gleichung und aus (1) und (6) kann man mit Hilfe der Besselschen Differentialgleichung die Funktionen J''_μ und J'_μ eliminieren, dann entsteht:

$$(7)\quad x^2\varphi'' - (2\nu-3)x\varphi' + \{(\nu-1)^2 - \mu^2\}\varphi = -\int_0^\infty \frac{J_\lambda(ux) J_\mu}{u^{\nu-2}}\, du.$$

Durch Vergleichung von (5) und (7) folgt:

$$x^2(x^2-1)\varphi'' - x\{(2\nu-3)x^2 + 1\}\varphi' + \{[(\nu-1)^2 - \mu^2]x^2 + \lambda^2\}\varphi = 0.$$

Setzt man hierin:

$$\varphi = x^\lambda \psi,$$

so findet man:

$$x^2(x^2-1)\psi'' + \{(2\lambda-2\nu+3)x^2-(2\lambda+1)\}x\psi' + \{\lambda(\lambda-2\nu+2)+(\nu-1)^2-\mu^2\}x^2\psi = 0.$$

Setzt man schließlich:

$$x^2 = \xi,$$

so geht die letzte Gleichung über in:

$$(8)\quad \xi(\xi-1)\psi''(\xi) + \{(\lambda-\nu+2)\xi-(\lambda+1)\}\psi'(\xi) + \tfrac{1}{4}(\lambda+\mu-\nu+1)(\lambda-\mu+\nu+1)\psi = 0$$

Führt man hierin ein:

$$\lambda = \gamma-1,$$
$$\mu = \alpha-\beta,$$
$$\nu = \gamma-\alpha-\beta,$$

so geht (8) in die Gleichung **1.** (10) über.

Bezeichnet man demnach:

$$(9)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma,x) = \int_0^\infty \frac{J_{\gamma-1}(xu)J_{\alpha-\beta}(u)}{u^{\gamma-\alpha-\beta}}\,du,$$

so ist

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha,\beta,\gamma,x) = Ax^{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma,x^2) \\ \qquad + Bx^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x^2), \end{cases}$$

wo A und B Konstanten sind, die noch ermittelt werden müssen.

Um zur Bestimmung der Konstanten zu gelangen, gelte folgendes. Man dividiere (9) durch $x^{\gamma-1}$ und bestimme den Grenzwert für $x=0$; mittels **2.** (7) erhält man:

$$\lim_{x=0}\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,x)}{x^{\gamma-1}} = \frac{1}{2^{\gamma-1}\Pi(\gamma-1)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}J_{\alpha-\beta}(u)\,du,$$

und dies wird nach **17.** (26):

$$\lim\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,x)}{x^{\gamma-1}} = \frac{\Pi(\alpha-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-1)},$$

vorausgesetzt, daß das Integral überhaupt endlich ist. Vergleicht man diesen Wert mit (10), so sieht man, daß für $\gamma > 1$ die Konstante B den Wert Null hat; dies gilt auch noch für $\gamma = 1$, weil

alsdann das zweite Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung für $x = 0$ logarithmisch unendlich wird. Für $x < 1$ erhält man daher:

$$(11)\quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\alpha - 1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma - 1)}\, x^{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma, x^2),$$

vorausgesetzt, daß nach 17. (26):

$$\alpha - \beta > -\frac{3}{2}, \quad \alpha + \beta < \frac{3}{2}, \quad \gamma \geq 1$$

ist. Die erste dieser Bedingungen kann wegen der Vertauschbarkeit von α und β in der hypergeometrischen Reihe stets als erfüllt betrachtet werden. Von den anderen beiden Beschränkungen kann man sich mit Hilfe gewisser Relationen zwischen hypergeometrischen Reihen, deren erste Elemente sich um ganze Zahlen unterscheiden, befreien. Es bleibt nur die für die Endlichkeit der betrachteten Integrale nötige Ungleichheitsbedingung (4) bestehen, die jetzt übergeht in:

$$\alpha > 0 \quad \text{und} \quad \gamma - \alpha - \beta - 1 > 0.$$

Die letzte Ungleichheitsbedingung war nötig, damit φ zweimal differenziiert werden konnte; es bleibt jedoch φ selbst endlich, sobald nur

$$\gamma - \alpha - \beta + 1 > 0$$

ist; es läßt sich zeigen, daß auch hierfür noch der obige Wert von φ erhalten bleibt.

Ist $x > 1$, so setze man $x = \frac{1}{\xi}$ und $ux = v$ in (9), so findet man durch (11) den Wert von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x)$ in diesem Falle. Man erhält schließlich folgendes Ergebnis:

$$(12)\begin{cases} \dfrac{2^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Pi(\alpha-1)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J_{\gamma-1}(xu)\, J_{\alpha-\beta}(u)}{u^{\gamma-\alpha-\beta}}\, du = \\ = \dfrac{x^{\gamma-1}}{\Pi(-\beta)\,\Pi(\gamma-1)}\, F(\alpha, \beta, \gamma, x^2), \qquad (x<1) \end{cases}$$

$$(13)\begin{cases} \dfrac{2^{\gamma-\alpha-\beta}}{\Pi(\alpha-1)} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J_{\gamma-1}(xu)\, J_{\alpha-\beta}(u)}{u^{\gamma-\alpha-\beta}}\, du = \\ = \dfrac{x^{\gamma-2\alpha-1}}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\alpha-\beta)}\, F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta-1, \dfrac{1}{x^2}\right) \quad (x>1), \end{cases}$$

wenn weder $\alpha - \beta$ noch $\gamma - 1$ eine negative ganze Zahl und sowohl α als auch $\gamma - \alpha - \beta + 1$ größer als Null ist.

Für $x = 0$ bleibt (12) gültig, mit Ausnahme des Falles

$$\gamma = 1 \quad \text{und zugleich} \quad \alpha + \beta > \frac{3}{2}.$$

Für $x = 1$ bleiben (12) und (13) in Geltung und gehen ineinander über, sobald $\gamma - \alpha - \beta > 0$ ist. Wenn aber $\gamma - \alpha - \beta \leqq 0$ ist, so wird im allgemeinen das Integral für $x = 1$ unendlich groß; nur wenn alsdann

$$\gamma - \alpha + \beta = 2m$$

ist, wo m eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluß der Null bedeutet, erhält man:

$$(14)\quad \int_0^\infty \frac{J_{\gamma-1}(x) J_{\alpha-\beta}(x)}{x^{\gamma-\alpha-\beta}}\,dx = \frac{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Pi(-\beta)\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

$$(\gamma-\alpha-\beta<0)$$

und für $\gamma - \alpha - \beta = 0$:

$$(15)\quad \int_0^\infty J_{\alpha+\beta-1}(x) J_{\alpha-\beta}(x)\,dx = \begin{cases} (-1)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{2}. & (\beta>0) \\ (-1)^{-\beta}\cdot\frac{1}{2} & (\beta\leqq 0) \end{cases}$$

Durch Spezialisierung von α, β und γ ergeben sich aus den Gleichungen (12) bis (15) eine große Zahl mehr oder minder interessanter Formeln. Als Beispiel setze man:

$$\alpha = \frac{\nu}{2}, \qquad \beta = -\frac{\nu}{2}, \qquad \gamma = \frac{1}{2},$$

so ergibt sich:

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(u)\cos(ux)}{u}\,du = \frac{1}{\nu} F\left(\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) \qquad \binom{x \leqq 1}{\nu > 0}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\nu\,\Pi\nu\,\Pi\left(-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{x^\nu} F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \nu+1, \frac{1}{x^2}\right) \qquad \binom{x \geqq 1}{\nu > 0}$$

oder mit Benutzung von **1.** (16) und (18):

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{J_\nu(u)\cos(ux)}{u}\,du = \frac{1}{\nu}F\left(\frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) & \begin{pmatrix} x \leqq 1 \\ \nu > 0 \end{pmatrix} \\ \displaystyle = \frac{\cos\frac{\nu}{2}\pi}{\nu}\,\frac{1}{(2x)^\nu}\,F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \nu+1, \frac{1}{x^2}\right). & \begin{pmatrix} x \geqq 1 \\ \nu > 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Im Falle $x \leqq 1$ setze man $x = \sin\varphi$, dann erhält man durch **1.** (9):

$$(17)\qquad \int_0^\infty J_\nu(u)\cos(u\sin\varphi)\frac{du}{u} = \frac{\cos\nu\varphi}{\nu}. \qquad \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ \nu > 0 \end{pmatrix}$$

Ganz entsprechend liefert die Annahme:

$$\alpha = \frac{\nu+1}{2}, \quad \beta = -\frac{\nu-1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}$$

in Verbindung mit **1.** (8):

$$(18)\qquad \int_0^\infty J_\nu(u)\sin(u\sin\varphi)\frac{du}{u} = \frac{\sin\nu\varphi}{\nu}\cdots \qquad \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ \nu > -1 \end{pmatrix}$$

Setzt man in (17) $\varphi = 0$, so erhält man die Gleichung **17.** (25), für $\nu = 0$ folgt aus (18):

$$(19)\qquad \int_0^\infty J_0(u)\sin(u\sin\varphi)\frac{du}{u} = \varphi,$$

während für $x \geqq 1$ sich ergibt:

$$(20)\qquad \int_0^\infty J_0(u)\sin(ux)\frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}.$$

IV. Abschnitt.

Das Additions- und das Multiplikationstheorem der Besselschen Funktionen.

20. Das Additionstheorem der Besselschen Funktionen. Aus dem Taylorschen Satze erhält man:

$$J_\nu(x+y) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^p}{\Pi p} \frac{d^p J_\nu(x)}{dx^p}.$$

Durch Benutzung von **4.** (9) findet man:

$$J_\nu(x+y) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda \frac{1}{\Pi\lambda\, \Pi(p-\lambda)} J_{\nu-p+2\lambda}(x).$$

Um hierin die Summationsordnung so vertauschen zu können, daß die Besselsche Funktion vor die innere Summe tritt, muß man die rechte Seite in zwei Teile — für gerade und ungerade Werte von p — zerlegen; beachtet man ferner, daß man in der inneren Summe wegen der beiden Nennerfaktoren dem Buchstaben λ die Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ erteilen darf, so findet man:

$$J_\nu(x+y) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^{2p} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\, \Pi(2p-\lambda)} J_{\nu-2p+2\lambda}(x) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^{2p+1} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\, \Pi(2p-\lambda+1)} J_{\nu-2p+2\lambda-1}(x).$$

Wählt man in den beiden inneren Summen $\lambda - p$ statt λ als Summationsbuchstaben und kehrt alsdann die Reihenfolge der Summationen um, so findet man:

$$J_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} J_{\nu+2\lambda}(x) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+\lambda} \left(\frac{y}{2}\right)^{2p}}{\Pi(p+\lambda)\, \Pi(p-\lambda)}$$

$$+ \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} J_{\nu+2\lambda-1}(x) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+\lambda} \left(\frac{y}{2}\right)^{2p+1}}{\Pi(p+\lambda)\, \Pi(p-\lambda+1)}.$$

Für die negativen Werte von λ mit Einschluß der Null kann man in den inneren Summen die untere Grenze auf $-\lambda$ erhöhen; für die positiven Werte von λ größer als Null kann diese untere Grenze auf λ resp. $\lambda - 1$ erhöht werden. Führt man dementsprechend $p + \lambda$ oder $p - \lambda$ resp. $p - \lambda + 1$ als Summationsbuchstaben ein und ersetzt schließlich in den negativen Teilen λ durch $-\lambda$, so bekommt man:

$$J_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} J_{\nu-2\lambda}(x) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2p+2\lambda}}{\Pi p \, \Pi(p+2\lambda)}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} J_{\nu+2\lambda}(x) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2p+2\lambda}}{\Pi p \, \Pi(p+2\lambda)}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\infty} J_{\nu-2\lambda-1}(x) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2p+2\lambda+1}}{\Pi p \, \Pi(p+2\lambda+1)}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} J_{\nu+2\lambda-1}(x) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{2p+2\lambda-1}}{\Pi p \, \Pi(p+2\lambda-1)}.$$

Indem man nun wieder die entsprechenden Teile mit geraden und ungeraden Werten von λ zusammenfaßt:

$$J_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} J_{\nu-\lambda}(x) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\lambda+2p}}{\Pi p \, \Pi(\lambda+p)}$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda J_{\nu+\lambda}(x) \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^{\lambda+2p}}{\Pi p \, \Pi(\lambda+p)}.$$

Nach **2.** (7) sind die inneren Summen $J_\lambda(y)$, so daß man findet:

$$(1) \quad J_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} J_{\nu-\lambda}(x) J_\lambda(y) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda J_{\nu+\lambda}(x) J_\lambda(y).$$

Mit Benutzung von **3.** (3) kann man diese Gleichung kürzer schreiben:

$$(2) \quad J_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} J_{\nu-\lambda}(x) J_\lambda(y).$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung wurde von Eigenschaften der Besselschen Funktionen nur die Formel **4.** (9) benutzt, die ebenso für die Funktionen zweiter Art gilt; demnach erhält man ebenso:

$$(3) \quad Y_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} Y_{\nu-\lambda}(x) J_\lambda(y) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda Y_{\nu+\lambda}(x) J_\lambda(y)$$

oder

$$Y_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} Y_{\nu-\lambda}(x) J_\lambda(y). \tag{4}$$

Die Gleichungen (2) und (4) werden als die Additionstheoreme der Besselschen Funktionen bezeichnet.

Um nun über die Konvergenz der gewonnenen Reihen zu entscheiden, hat man die Werte zu ermitteln, die die Besselschen Funktionen annehmen, wenn der Parameter in positivem oder negativem Sinne über alle Grenzen wächst, oder anders ausgedrückt, wenn das Argument im Vergleich zum Parameter sehr klein wird. Die Definition 2. (7) zeigt, daß alsdann $J_\nu(x)$ gegen $\frac{x^\nu}{2^\nu \Pi\nu}$ konvergiert. Bricht man daher die zweite Summe in (1) bei einem gewissen großen Werte $\lambda = \lambda_1$ ab, so wird der Rest gegen

$R_{\lambda_1} = \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{x^{\nu+\lambda} y^\lambda}{2^{\nu+2\lambda} \Pi\lambda \Pi(\nu+\lambda)}$ konvergieren. Nun ist:

$$R_{\lambda_1} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{(xy)^\lambda}{2^{2\lambda} \Pi\lambda \Pi(\nu+\lambda)}.$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen stimmt überein mit dem der Besselschen Funktion $J_\nu(\sqrt{xy})$, und es konvergiert daher der Rest R_{λ_1} mit wachsendem λ_1 gegen Null. Entsprechend erhält man für den Rest R'_{λ_1} der ersten Reihe:

$$R'_{\lambda_1} = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{\Pi\lambda \Pi(\nu-\lambda)} \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Pi\nu} \sum_{\lambda=\lambda_1}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\Pi\nu}{\Pi\lambda \Pi(\nu-\lambda)} \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda.$$

Diese Reihe stimmt mit der binomischen Reihe für $\left(1-\frac{y}{x}\right)^\nu$ überein; es wird daher R'_{λ_1} gegen Null konvergieren, sobald der absolute Betrag von y kleiner oder gleich dem von x ist unter der Voraussetzung, daß ν eine positive Zahl ist.

Die erhaltene Entwicklung (1) ist also konvergent, sobald $|y| \leqq |x|$ ist; wenn aber im speziellen ν eine positive ganze Zahl

ist, so ist wegen **3.** (3) diese Entwicklung für alle Werte von x und y konvergent.

Für $\nu = 0$ erhält man im speziellen:

$$(5)\qquad J_0(x+y) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda J_\lambda(x)J_\lambda(y),$$

$$(6)\qquad Y_0(x+y) = Y_0(x)J_0(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^\lambda Y_\lambda(x)J_\lambda(y)$$

und für $\nu = 1$:

$$(7)\qquad J_1(x+y) = J_1(x)J_0(y) + \sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda-1}\{J_{\lambda-1}(x) - J_{\lambda+1}(x)\}J_\lambda(y)$$
$$= -J_0'(x)J_0(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda-1}J_\lambda'(x)J_\lambda(y),$$

$$(8)\qquad Y_1(x+y) = -Y_0'(x)J_0(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty}(-1)^{\lambda-1}Y_\lambda'(x)J_\lambda(y).$$

21. Das Multiplikationstheorem der Besselschen Funktionen. Aus der Definitionsgleichung **2.** (7) erhält man:

$$J_\nu(xy) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa \frac{\left(\frac{xy}{2}\right)^{\nu+2\varkappa}}{\Pi\varkappa\,\Pi(\nu+\varkappa)}.$$

Multipliziert man mit $\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$, so findet man:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu J_\nu(xy) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa \frac{y^{\nu+2\varkappa}}{\Pi\varkappa\,\Pi(\nu+\varkappa)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2\varkappa}.$$

Durch Benutzung von **15.** (9) ergibt sich hieraus:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu J_\nu(xy) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\varkappa y^{\nu+2\varkappa}}{\Pi\varkappa\,\Pi(\nu+\varkappa)}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{\Pi(\nu+\varkappa)}{\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\varkappa+\lambda}J_{\nu+\varkappa+\lambda}(x).$$

Setzt man in der inneren Summe λ an Stelle von $\varkappa+\lambda$, so wird:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu J_\nu(xy) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}\frac{(-1)^\varkappa y^{\nu+2\varkappa}}{\Pi\varkappa}\sum_{\lambda=\varkappa}^{\infty}\frac{1}{\Pi(\lambda-\varkappa)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\lambda}J_{\nu+\lambda}(x).$$

Durch Vertauschung der Summationsordnung folgt:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} J_{\nu}(xy) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\lambda} y^{\nu} J_{\nu+\lambda}(x) \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \frac{(-1)^{\varkappa} y^{2\varkappa}}{\Pi\varkappa\, \Pi(\lambda-\varkappa)}$$

$$= \left(\frac{xy}{2}\right)^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} \frac{(1-y^2)^{\lambda}}{\Pi\lambda} J_{\nu+\lambda}(x)$$

oder:

$$J_{\nu}(xy) = y^{\nu} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-y^2)^{\lambda}}{\Pi\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda} J_{\nu+\lambda}(x). \tag{1}$$

Diese Gleichung kann man als das Multiplikationstheorem der Besselschen Funktionen erster Art bezeichnen.

Durch Benutzung von **4.** (6) läßt sich (1) in eine ganz andere Form bringen. Es ergibt sich:

$$J_{\nu}(xy) = y^{\nu} J_{\nu}(x) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-y^2)^{\lambda}}{\Pi\lambda}$$

$$\times \sum_{\varkappa=0} (-1)^{\varkappa} \frac{\Pi(\lambda-\varkappa)\,\Pi(\nu+\lambda-\varkappa-1)}{\Pi\varkappa\, \Pi(\lambda-2\varkappa)\, \Pi(\nu+\varkappa-1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\varkappa}$$

$$- y^{\nu} J_{\nu-1}(x) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-y^2)^{\lambda}}{\Pi\lambda}$$

$$\times \sum_{\varkappa=0} (-1)^{\varkappa} \frac{\Pi(\lambda-\varkappa-1)\,\Pi(\nu+\lambda-\varkappa-1)}{\Pi\varkappa\, \Pi(\lambda-2\varkappa-1)\, \Pi(\nu+\varkappa)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\varkappa+1}.$$

Der Faktor von $y^{\nu} J_{\nu}(x)$ läßt sich durch Vertauschung der Summationsordnung in die Form bringen:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\varkappa}}{\Pi\varkappa\, \Pi(\nu+\varkappa-1)} \sum_{\lambda=2\varkappa}^{\infty} \frac{\Pi(\lambda-\varkappa)\,\Pi(\nu+\lambda-\varkappa-1)}{\Pi\lambda\, \Pi(\lambda-2\varkappa)} (1-y^2)^{\lambda}.$$

Setzt man in der inneren Summe λ statt $\lambda - 2\varkappa$, so wird sie:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Pi(\lambda+\varkappa)\Pi(\nu+\varkappa+\lambda-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(\lambda+2\varkappa)}(1-y^2)^{\lambda+2\varkappa}$$
$$= (1-y^2)^{2\varkappa}\frac{\Pi\varkappa\,\Pi(\nu+\varkappa-1)}{\Pi(2\varkappa)}F(\varkappa+1,\varkappa+\nu,2\varkappa+1,1-y^2)$$

nach **1.** (25). Ganz ebenso läßt sich der Faktor von $y^\nu J_{\nu-1}(x)$ behandeln; wenn man die gefundenen Werte oben einsetzt, findet man:

$$(2)\qquad J_\nu(xy) = y^\nu J_\nu(x)$$
$$\times\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa\left(\frac{x}{2}\right)^{2\varkappa}\frac{(1-y^2)^{2\varkappa}}{\Pi(2\varkappa)}F(\varkappa+1,\varkappa+\nu,2\varkappa+1,1-y^2)$$
$$+\,y^\nu J_{\nu-1}(x)$$
$$\times\sum_{\varkappa=1}^{\infty}(-1)^\varkappa\left(\frac{x}{2}\right)^{2\varkappa-1}\frac{(1-y^2)^{2\varkappa-1}}{\Pi(2\varkappa-1)}F(\varkappa,\varkappa+\nu,2\varkappa,1-y^2).$$

Wegen der mannigfachen Transformationen, die zwischen hypergeometrischen Reihen bestehen, läßt die rechte Seite sich in viele andere Formen bringen. Man kann ferner nur mit Zuhilfenahme der in **4.** zusammengestellten Rekursions- und Differentialformeln zeigen, daß die rechte Seite in (2) der Besselschen Differentialgleichung genügt. Es wird daher auch diejenige Funktion, welche man erhält, wenn man Y_ν und $Y_{\nu-1}$ an Stelle von J_ν und $J_{\nu-1}$ auf der rechten Seite schreibt, eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung sein; dadurch, daß man schließlich $y = 1$ setzt, findet man, daß dies die Lösung $Y_\nu(xy)$ ist. Also erhält man eine neue richtige Gleichung, wenn man überall in (2) statt der Funktionen erster diejenigen zweiter Art einführt.

Multipliziert man (2) mit $Y_{\nu-1}(x)$ und die Gleichung, die aus (2) durch Einführung der Besselschen Funktionen zweiter Art entsteht, mit $J_{\nu-1}(x)$ und subtrahiert die erste von der zweiten Gleichung, so folgt:

$$(3)\qquad Y_\nu(xy)J_{\nu-1}(x) - J_\nu(xy)Y_{\nu-1}(x)$$
$$= \frac{2}{\pi x}\cdot y^\nu\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa\left(\frac{x}{2}\right)^{2\varkappa}\frac{(1-y^2)^{2\varkappa}}{\Pi(2\varkappa)}F(\varkappa+1,\varkappa+\nu,2\varkappa+1,1-y^2)$$

und zwar mit Hilfe von **13.** (4). Ganz ähnlich erhält man:

$$(4)\qquad J_\nu(xy)Y_\nu(x) - Y_\nu(xy)J_\nu(x)$$
$$= \frac{1}{\pi}y^\nu \sum_{\varkappa=1}^{\infty}(-1)^\varkappa \left(\frac{x}{2}\right)^{2\varkappa-1} \frac{(1-y^2)^{2\varkappa-1}}{\Pi(2\varkappa-1)} F(\varkappa, \varkappa+\nu, 2\varkappa, 1-y^2).$$

Es läßt sich noch eine andere Form des Multiplikationstheorems finden.

Benutzt man in:

$$J_\nu(xy) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa \frac{\left(\frac{xy}{2}\right)^{\nu+2\varkappa}}{\Pi\varkappa\,\Pi(\nu+\varkappa)}$$

die Gleichung **15.** (1), so erhält man:

$$J_\nu(xy) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa \frac{y^{\nu+2\varkappa}}{\Pi\varkappa\Pi(\nu+\varkappa)}$$
$$\cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\varkappa+2\lambda)\,\Pi(\nu+2\varkappa+\lambda-1)}{\Pi\lambda} J_{\nu+2\varkappa+2\lambda}(x).$$

Auf eine Art, die schon mehrfach in ähnlichen Fällen benutzt worden ist, ergibt sich hieraus:

$$J_\nu(xy) = y^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(-\lambda-1)} J_{\nu+2\lambda}(x)$$
$$\times \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} \frac{\Pi(\nu+\lambda+\varkappa-1)\,\Pi(\varkappa-\lambda-1)}{\Pi\varkappa\,\Pi(\varkappa+\nu)} y^{2\varkappa},$$

also nach **1.** (25):

$$(5)\qquad \frac{\Pi\nu}{y^\nu} J_\nu(xy)$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\lambda)\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda} J_{\nu+2\lambda}(x)\, F(\nu+\lambda, -\lambda, \nu+1, y^2).$$

Speziell für $\nu = 0$ und 1:

$$(5\text{a})\qquad \begin{cases} J_0(xy) = J_0(x) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} J_{2\lambda}(x) F(\lambda, -\lambda, 1, y^2) \\ J_1(xy) = y\sum_{\lambda=0}^{\infty}(2\lambda+1) J_{2\lambda+1}(x) F(\lambda+1, -\lambda, 2, y^2). \end{cases}$$

Da die hier auftretenden hypergeometrischen Reihen ganze Funktionen (λ)-ten Grades von y^2 sind, so sind diese Formeln, ebenso wie Gleichung (1), für jeden Wert von y direkt zu benutzen. Sie können beispielsweise dazu verwendet werden, um die Funktion J_ν für gebrochene Werte des Arguments zu berechnen, wenn sie für ganzzahlige Werte x bekannt ist.

V. Abschnitt.

Verlauf und Größe der Besselschen Funktionen für gewisse Werte des Arguments und Parameters.

22. Die Funktionen $J_{\frac{1}{2}}$ und $Y_{\frac{1}{2}}$. In den folgenden Nummern soll versucht werden, nach Möglichkeit ein Bild zu gewinnen von dem Verlaufe und der ungefähren Größe der Besselschen Funktionen. Hierbei hat man natürlich wesentlich zu unterscheiden, ob das Argument x reelle oder komplexe Werte besitzt; der erste Fall ist der wichtigste und zugleich einfachste, weil hierbei das Argument eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Werten zu durchlaufen hat. Neben diesem Hauptfall sollen von den unzählig vielen anderen Fällen nur zwei der Betrachtung unterworfen werden, nämlich erstens der Fall, daß das Argument rein-imaginäre Werte besitzt oder, anders ausgedrückt, die imaginäre Achse der Zahlenebene durchläuft, und zweitens der, daß der reelle gleich dem imaginären Bestandteil des Arguments ist, oder daß dieses die Halbierungslinie des Winkels der reellen und imaginären Achse durchläuft.

Um die Vorstellungen zu klären und an Bekanntes anzuknüpfen, werden zunächst die Funktionen

$$(1) \qquad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \quad \text{und} \quad Y_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

betrachtet.

Gibt man in diesen Funktionen dem Argumente x positive reelle Werte, so erhält wegen der Quadratwurzel jede Funktion zwei reelle Werte, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Denkt man sich das Argument als Abszisse, die zugehörigen Funktionswerte als Ordinaten gezeichnet, so werden die beiden

Kurven, die den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel entsprechen, symmetrisch gegen die Abszissenachse liegen. Man wird daher ein völlig klares Bild des Verlaufs der Funktion haben, wenn man nur die eine Kurve, z. B. die zum positiven Werte der Quadratwurzel gehörige, genau verfolgen kann. Unter dieser Annahme erkennt man aus (1) und den bekannten Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, daß $J_{\frac{1}{2}}$ für $x = 0$ den Wert Null hat und mit wachsendem x zunächst positive Werte annimmt, für $x = \pi$ aber wieder Null wird, dann negative Werte erhält, bei $x = 2\pi$ abermals verschwindet usw. Geometrisch wird $J_{\frac{1}{2}}$ durch eine Wellenlinie dargestellt werden, deren Knoten in den Punkten $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ usw. liegen. Diese Wellenlinie unterscheidet sich aber von der gewöhnlichen Sinuslinie wesentlich dadurch, daß die Amplituden der einzelnen Schwingungen fortwährend abnehmen, so daß diese allmählich abklingen, wie dies in der Figur 1 der Tafel, die am Ende dieses Buches sich befindet, veranschaulicht wird. Aus (1) folgt:

$$(2) \qquad J'_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{2x \cos x - \sin x}{2x}.$$

Die Nullstellen dieser Funktion liefern die Maximal- bzw. Minimalwerte von $J_{\frac{1}{2}}$, d. h. die Stellen größter Abweichung von der Abszissenachse.

Die Gleichung

$$(3) \qquad 2x \cos x - \sin x = 0$$

besitzt nur solche Wurzeln, wofür $\cos x$ und $\sin x$ gleiche Vorzeichen haben, d. h die Wurzeln liegen zwischen $k\pi$ und $(k + \frac{1}{2})\pi$, wo k eine beliebige positive Zahl mit Einschluß der Null bedeutet. Die erste Wurzel $x = 0$ von (3) kommt nicht in Betracht, weil hierfür $J'_{\frac{1}{2}}$ unendlich groß wird; aus (3) folgt:

$$\operatorname{tg} x = 2x.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem x stetig zunimmt, die linke Seite aber in den ungeraden Quadranten periodisch die positiven Werte von 0 bis ∞ annimmt, so wird in jedem späteren Quadranten der Wurzelwert der Gleichung näher an die obere Grenze des Quadranten heranrücken. Daraus erkennt man, daß die höchsten und tiefsten Stellen der Wellenberge unserer Kurve etwas vor der

Mitte zwischen den Knotenpunkten sich befinden, aber dieser Mitte mehr und mehr mit wachsendem x zustreben, ohne sie je ganz zu erreichen.

Ähnliche Betrachtungen über $Y_{\frac{1}{2}}$ und dessen Ableitung:

$$(4) \qquad Y'_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{-2x \sin x - \cos x}{2x}$$

führen zu folgenden Ergebnissen.

Für $x = 0$ wird $Y_{\frac{1}{2}}$ unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{x}}$ und wird für kleine positive Werte von x zunächst positive sehr große Werte besitzen, mit wachsendem x aber vorläufig abnehmen, für $x = \frac{\pi}{2}$ die erste Nullstelle besitzen, alsdann ins negative Gebiet eintreten, bei $x = \frac{3}{2}\pi$ abermals verschwinden und nun in ähnlicher Weise wie $J_{\frac{1}{2}}$ in Schwingungen mit allmählich abnehmender Amplitude verlaufen, die also ähnlich abklingen wie die Schwingungen von $J_{\frac{1}{2}}$; die betreffende Kurve ist ebenfalls in Fig. 1 gezeichnet.

Zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π erreicht $Y_{\frac{1}{2}}$ ein erstes Minimum, die folgenden höchsten und tiefsten Stellen der Wellenberge liegen wieder stets etwas vor der Mitte zwischen den Knotenpunkten und streben mit wachsendem x mehr und mehr dieser Mitte zu. Der absolute Wert beider Funktionen ist stets kleiner oder höchstens gleich dem von $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$, d. h. es befinden sich die Funktionswerte stets zwischen den beiden gegen die Abszissenachse symmetrischen Zweigen der Kurve III. Ordnung $xy^2 = \frac{2}{\pi}$, die in Fig. 1 durch die gestrichelte Linie angedeutet ist. Während für $Y_{\frac{1}{2}}$ diese Funktion $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ als obere Grenze für alle positiven reellen Werte von x betrachtet werden kann, bleibt natürlich $J_{\frac{1}{2}}$ für $x < \frac{\pi}{2}$ erheblich unter dem Werte dieser Funktion.

Ist x eine negative reelle Zahl, $x = -x'$, so wird:

$$(5) \qquad J_{\frac{1}{2}}(x) = -i\, J_{\frac{1}{2}}(x') \quad \text{und} \quad Y_{\frac{1}{2}}(x) = +i\, Y_{\frac{1}{2}}(x');$$

die Funktionen werden also rein imaginär, unterscheiden sich aber von den eben betrachteten Werten nur durch den Faktor $\mp i$, so daß über ihren Verlauf nichts weiter zu sagen ist.

Ist aber x eine rein-imaginäre Zahl, $x = ir$, so wird das Bild ein ganz anderes. In diesem Falle wird:

$$J_{\frac{1}{2}}(ir) = \sqrt{\frac{2}{\pi r i}} \cdot \sin(ir) = \sqrt{\frac{2}{\pi r i}} \cdot \frac{i}{2}(e^r - e^{-r})$$
$$= \sqrt{\frac{i}{2\pi r}}(e^r - e^{-r}).$$

Nun ist:

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

so daß man erhält:

$$J_{\frac{1}{2}}(ir) = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi r}}(e^r - e^{-r}).$$

$J_{\frac{1}{2}}$ nimmt also komplexe Werte an, so daß die reellen und imaginären Teile gleiche Zahlenwerte haben.

Setzt man zur Abkürzung:

$$I_{\frac{1}{2}}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi r}}(e^r - e^{-r}), \tag{6}$$

so daß also:

$$J_{\frac{1}{2}}(ir) = (1+i)\, I_{\frac{1}{2}}(r) \tag{7}$$

wird, so ist $I_{\frac{1}{2}}$ eine Funktion, die für $r = 0$ verschwindet und für positive Werte von r selbst positiv ist und stets zunimmt. Denn es ist:

$$I'_{\frac{1}{2}}(r) = \frac{(2r-1)e^r + (2r+1)e^{-r}}{4\sqrt{\pi r}}. \tag{8}$$

Der Zähler dieses Bruches wird niemals Null; für $2r > 1$ ist dieses ohne weiteres klar; für einen bestimmten Wert von $2r < 1$ müßte sein:

$$e^{2r} = \frac{1+2r}{1-2r} = 1 + 2(2r) + 2(2r)^2 + 2(2r)^3 + \cdots.$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe sind aber vom zweiten anfangend größer als die entsprechenden der Exponentialreihe, so daß die Gleichung nie bestehen kann.

Wächst r unbegrenzt, so nimmt auch $I_{\frac{1}{2}}$ unendlich große Werte an.

Ähnlich ergibt sich:

$$Y_{\frac{1}{2}}(ir) = \sqrt{\frac{2}{\pi r i}} \cos(ir) = \sqrt{\frac{-i}{2\pi r}}(e^r + e^{-r})$$
$$= \frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi r}}(e^r + e^{-r}).$$

Setzt man:

$$L_{\frac{1}{2}}(r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi r}}(e^r + e^{-r}), \tag{9}$$

so wird:

$$Y_{\frac{1}{2}}(ir) = (1-i)\, L_{\frac{1}{2}}(r). \tag{10}$$

Für rein-imaginäre Werte des Arguments wird demnach $Y_{\frac{1}{2}}$ komplex, und zwar so, daß die reellen und imaginären Teile entgegengesetzt gleiche Zahlenwerte haben. Für $r = 0$ wird $L_{\frac{1}{2}}$ wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ unendlich, für positive Werte von r nimmt $L_{\frac{1}{2}}$ selbst positive Werte an, und zwar nimmt $L_{\frac{1}{2}}$ mit wachsendem r zunächst ab. Es ist:

$$L'_{\frac{1}{2}}(r) = \frac{(2r-1)\,e^r - (2r+1)\,e^{-r}}{4r\sqrt{\pi r}}.$$

Für denjenigen Wert von r, wofür:

$$e^{2r} = \frac{2r+1}{2r-1}$$

ist, besitzt $L_{\frac{1}{2}}$ ein Minimum; es findet dies statt für $r = 0{,}77170\cdots$. Von diesem Werte an wächst $L_{\frac{1}{2}}$ unbegrenzt und wird für unendlich große Werte von r selbst unendlich.

Während für reelle unendlich große Werte des Arguments beide Besselsche Funktionen verschwinden, werden für rein-imaginäre, unendlich große Werte beide Funktionen unendlich groß. Aber auch in diesem Falle läßt sich eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung finden, die im Unendlichen verschwindet. Zu diesem Zweck hat man $J_{\frac{1}{2}}$ und $Y_{\frac{1}{2}}$ mit solchen Faktoren

zu multiplizieren und zu addieren, daß dabei die Funktion e^r fortfällt; man findet so die Funktion:

$$(1+i)\,Y_{\frac{1}{2}} - (1-i)\,J_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi r}}\, e^{-r}, \tag{11}$$

die natürlich noch mit einem willkürlichen konstanten Faktor multipliziert werden kann.

Ist schließlich x eine beliebige komplexe Zahl, so kann sie stets in die Form $x = (r, \vartheta) = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ gebracht werden. Liegt x auf der Halbierungslinie des Winkels beider Achsen, so hat man $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ zu setzen; dieser Fall soll als Beispiel für den allgemeinen Fall dienen. Es ist:

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}\left(r, \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \sin\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(1+i)\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\
&\quad \times \left(\sin\frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \cos\frac{ir}{\sqrt{2}} + \cos\frac{r}{\sqrt{2}} \sin\frac{ir}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\
&\quad \times \left\{\sin\frac{r}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} + e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\right) + i\cos\frac{r}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} - e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\frac{1}{2}}\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}} \Bigg\{ &\sin\left(\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} + \sin\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}} \\
&+ i\left[\cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} - \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Hier erhält man für $J_{\frac{1}{2}}$ komplexe Zahlen, deren reelle und imaginäre Bestandteile völlig verschieden sind. Für $r = 0$ wird $J_{\frac{1}{2}}\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0$, für unendlich große r wird auch $J_{\frac{1}{2}}$ unendlich groß; für gewisse Werte von r kann der reelle, für andere der imaginäre Bestandteil verschwinden; zugleich aber können beide nicht verschwinden, denn $\sin x$ hat keine komplexen Wurzeln.

Für die Besselsche Funktion zweiter Art ergibt sich:

$$Y_{\frac{1}{2}}\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\left\{\cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} + \cos\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}\right)e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\right.$$

$$(13) \qquad \left. - i\left[\sin\left(\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{r}{\sqrt{2}}} - \sin\left(\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)e^{-\frac{r}{\sqrt{2}}}\right]\right\}.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß aus beiden Funktionen eine neue gebildet werden kann, die im Unendlichen verschwindet, nämlich $i \cdot J_{\frac{1}{2}} + Y_{\frac{1}{2}}$.

23. Die Funktionen J_0 und Y_0 für positive reelle Werte des Arguments. Aus den Reihen **2.** (7a) und (7b):

$$(1) \qquad J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{(2)^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \cdots$$

$$(2) \qquad J_1(x) = -J_0'(x) = \frac{x}{2}\left\{1 - \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \cdots\right\}$$

erkennt man, daß $J_0(0) = 1$ und daß für $x \leqq 2$ die Reihe positiv ist, weil, wenn man in der Reihe für J_0 je zwei aufeinanderfolgende Glieder zu einem Gliede vereinigt, die neue Entwicklung nur positive Glieder enthält. Aus der zweiten Reihe erkennt man, daß $J_0(x)$ für Werte von x, die kleiner als $2\sqrt{2}$ sind, mit wachsendem x abnimmt. Genaueres über den Verlauf von $J_0(x)$ läßt sich aber aus **11.** (4) ablesen; diese Gleichung geht für $\nu = 0$ über in:

$$(3) \qquad J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2x\,\mathrm{cotg}\,\omega}\, d\omega.$$

Alle im Integranden auftretenden Funktionen sind positiv mit Ausnahme der Funktion $\sin\left(x + \frac{\omega}{2}\right)$, die sowohl positive als negative Werte annehmen kann. Ist $x \leqq \frac{3}{4}\pi$, so ist daher das Integral positiv; ist dagegen $x > \pi$, aber $x \leqq 1\frac{3}{4}\pi$, so ist der Sinus negativ d. h. $J_0(x)$ negativ. Es liegt also die erste Nullstelle von $J_0(x)$ zwischen $x = \frac{3}{4}\pi$ und $x = \pi$.

Setzt man allgemein:

$$x = (k + \varepsilon)\pi,$$

wo k eine positive ganze Zahl mit Einschluß der Null und ε einen positiven echten Bruch bedeutet, so wird:

$$(4) \qquad J_0(x) = (-1)^k \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\varepsilon\pi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega.$$

Ist $\varepsilon \leqq \frac{3}{4}$, so wird J_0 positiv sein, wenn k gerade ist, und negativ, wenn k ungerade ist; ein Zeichenwechsel d. h. eine Nullstelle von $J_0(x)$ kann nur eintreten, wenn ε zwischen $\frac{3}{4}$ und 1 liegt. Dieses Intervall läßt sich aber noch verengern.

Setzt man

$$\varepsilon = \frac{3 + \varepsilon'}{4}$$

wo $\varepsilon' < 1$ ist, so wird:

$$(-1)^k \frac{\pi}{2} J_0(x) = \int_0^{(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varepsilon'}{4}\pi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega$$

$$+ \int_{(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varepsilon'}{4}\pi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega$$

$$(5) \qquad = \int_0^{(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon'}{4}\pi - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega$$

$$- \int_0^{\frac{\varepsilon'\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon'\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\omega\sqrt{\sin\omega}} e^{-2x\operatorname{tg}\omega}\, d\omega.$$

Jedes dieser beiden Integrale ist positiv; bezeichnet man das erste zur Abkürzung mit φ, das zweite mit ψ, so ist:

$$\varphi < \frac{\sin(1-\varepsilon')\frac{\pi}{4}\sin(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\cos(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}}}\int\limits_0^{(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}}{\sin^2\omega}\,d\omega$$

$$(6) \qquad < \frac{\sin(1-\varepsilon')\frac{\pi}{4}\sin(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}}{2x\sqrt{\cos(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}}}\,e^{-2x\operatorname{tg}\frac{\varepsilon'\pi}{2}}$$

$$< \frac{\sin(1-\varepsilon')\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\varepsilon'\pi}{2}}{2x\sqrt{\sin\frac{\varepsilon'\pi}{2}}}\,e^{-2x\operatorname{tg}\frac{\varepsilon'\pi}{2}}.$$

Ferner ist:

$$\psi > \frac{1}{\operatorname{Max}\cdot(\cos\omega\sqrt{\sin\omega}\,e^{2x\operatorname{tg}\omega})}\int\limits_0^{\frac{\varepsilon'\pi}{2}}\sin\left(\frac{\varepsilon'\pi}{4}-\frac{\omega}{2}\right)d\omega,$$

wo der im Nenner stehende Ausdruck den größten Wert der eingeklammerten Funktion im Intervall von 0 bis $\frac{\varepsilon'\pi}{2}$ bedeutet. Der nach ω genommene Differentialquotient von $\cos\omega\sqrt{\sin\omega}\,e^{2x\operatorname{tg}\omega}$ ist:

$$\frac{(4x-\sin 2\omega)\sin\omega+\cos^3\omega}{2\cos\omega\sqrt{\sin\omega}}\,e^{2x\operatorname{tg}\omega};$$

er ist also positiv, sobald $x > \frac{1}{4}$ ist. Da diese Bedingung schon für die erste Nullstelle $(x > \frac{3}{4}\pi)$ erfüllt ist, so nimmt die obige Funktion im Intervall 0 bis $\frac{\varepsilon'\pi}{4}$ beständig zu und erreicht demnach an der oberen Grenze den größten Wert. Es wird also:

$$(7)\qquad \begin{aligned}\psi &> \frac{2\left(1-\cos\frac{\varepsilon'\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\varepsilon'\pi}{2}\sqrt{\sin\frac{\varepsilon'\pi}{2}}}\, e^{-2x\,\mathrm{tg}\frac{\varepsilon'\pi}{2}}\\ &> \frac{4\sin^2\frac{\varepsilon'\pi}{8}}{\cos\frac{\varepsilon'\pi}{2}\sqrt{\sin\frac{\varepsilon'\pi}{2}}}\, e^{-2x\,\mathrm{tg}\frac{\varepsilon'\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Befindet sich $x = \left(k + \frac{3+\varepsilon'}{4}\right)\pi$ vor einer Nullstelle von $J_0(x)$, so ist $\varphi - \psi$ positiv; liegt aber x nach einer Nullstelle, so ist $\varphi - \psi$ negativ. Aus den eben berechneten Werten ergibt sich, daß diese Differenz sicher negativ ist, wenn:

$$\frac{4\sin^2\frac{\varepsilon'\pi}{8}}{\cos\frac{\varepsilon'\pi}{2}} > \frac{\sin(1-\varepsilon')\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\varepsilon'\pi}{2}}{2x}$$

ist, oder wenn:

$$(8)\qquad x > \frac{\sin(1-\varepsilon')\frac{\pi}{4}\cdot\cos^2\frac{\varepsilon'\pi}{2}}{8\sin^2\frac{\varepsilon'\pi}{8}}.$$

Prüft man diese Ungleichheit auf ihre Richtigkeit für $\varepsilon' = \frac{1}{2}$, so nimmt die rechte Seite den Wert an:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}}{8\sin^2\frac{\pi}{16}} = \frac{\mathrm{cotg}\frac{\pi}{16}\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{4}}{4\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{16}} = \frac{1}{8\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{16}}.$$

Nun ist $\mathrm{tg}\frac{\pi}{16} > \frac{\pi}{16}$, demnach wird der Bruch kleiner als $\frac{2}{\pi}$. Die Ungleichheit $x > \frac{2}{\pi}$ ist aber für die erste, also auch für alle folgenden Nullstellen erfüllt; folglich erhält man den Satz:

Die positiven reellen Nullstellen von $J_0(x)$ liegen zwischen $(k+\frac{5}{8})\pi$ und $(k+\frac{7}{8})\pi$, wo k alle ganzzahligen Werte mit Einschluß der Null durchläuft.

Hieraus erkennt man, daß die Kurve, die $J_0(x)$ darstellt und die in Fig. 2 gezeichnet ist, ähnliche Wellenform besitzen wird

wie $J_{\frac{1}{2}}(x)$. Während aber bei $J_{\frac{1}{2}}$ die Knotendistanz stets π beträgt, ist sie bei J_0 variabel, und zwar kleiner als π.

Es sei, um dies zu zeigen, $\xi = \left(k + \frac{3+\varepsilon'}{4}\right)\pi$ eine Wurzel von $J_0(x) = 0$, so ist für $k\pi < x < \xi$ der Wert von $(-1)^k J_0(x)$ positiv; überschreitet x den Wert ξ, so wird dieser Ausdruck negativ. Wenn $(-1)^k J_0(\xi + \pi)$ wieder positiv ist, so ist die obige Behauptung richtig. Nun ist nach (5) für diesen Wert von ε':

$$
(9) \quad \int_0^{(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon'}{4}\pi - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2\xi\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega
= \int_0^{\frac{\varepsilon'\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon'\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\omega\sqrt{\sin\omega}} e^{-2\xi\operatorname{tg}\omega}\,d\omega
$$

und:

$$
(-1)^k \frac{\pi}{2} J_0(\xi + \pi) = \int_0^{\frac{\varepsilon'\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon'\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\omega\sqrt{\sin\omega}} e^{-2(\xi+\pi)\operatorname{tg}\omega}\,d\omega
- \int_0^{(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon'\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2(\xi+\pi)\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega.
$$

Nun ist sofort ersichtlich, daß das erste Integral der letzten Gleichung größer ist als:

$$
e^{-2\pi\operatorname{tg}\frac{\varepsilon'\pi}{2}} \int_0^{\frac{\varepsilon'\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon'\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}{\cos\omega\sqrt{\sin\omega}} e^{-2\xi\operatorname{tg}\omega}\,d\omega
$$

und das zweite kleiner als:

$$e^{-2\pi \operatorname{tg}\frac{\varepsilon'\pi}{2}} \int_0^{(1-\varepsilon')\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon'\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2\xi\operatorname{cotg}\omega} d\omega,$$

und diese beiden Ausdrücke sind nach (9) einander gleich, somit ist $(-1)^k J_0(\xi + \pi)$ positiv.

Aus (8) sieht man, daß ε' um so kleiner gewählt werden kann, je größer x ist; es werden also die höheren Nullstellen immer näher an $(k + \frac{3}{4})\pi$ heranrücken, jedoch so, daß die Wurzeldifferenz stets kleiner als π bleibt.

Genau die entsprechenden Betrachtungen lassen sich an die aus **11.** (5) folgende Gleichung:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(x + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\omega}} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega} d\omega \tag{10}$$

anknüpfen, und man erhält:

Für sehr kleine positive Werte des Arguments hat $Y_0(x)$ sehr große positive Werte und nimmt ab; die erste Nullstelle liegt zwischen $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{3\pi}{8}$. Die Kurve, die $Y_0(x)$ darstellt, nimmt nun einen ähnlichen, wellenförmigen Verlauf wie die von $J_0(x)$, und zwar verschlingen sich beide Kurven in ähnlicher Weise wie die Sinus- und Kosinuslinie und wie es in Fig. 2 zu erkennen ist. Die reellen positiven Nullstellen von $Y_0(x)$ liegen zwischen $(k + \frac{2}{8})\pi$ und $(k + \frac{3}{8})\pi$, wo k alle ganzzahligen Werte mit Einschluß der Null durchläuft. Der Unterschied zweier aufeinanderfolgenden Nullstellen ist kleiner als π, konvergiert aber mit wachsendem k gegen π.

Aus **11.** (4) und (5) findet man für den absoluten Wert B_ν von J_ν sowohl als auch von Y_ν die Ungleichung:

$$B_\nu < \frac{2^{\nu+1}x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega}{\sin^{2\nu+1}\omega}\, e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega.$$

Setzt man nun:

$$2x \operatorname{cotg}\omega = u,$$

so geht diese Ungleichung über in:

$$B_\nu < \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})\,2^{\nu-1}x^\nu}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}(4x^2+u^2)^{\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}}\, du.$$

Ist $\nu < \frac{1}{2}$, so ist der Exponent des letzten Faktors negativ, es wird also sein Wert mit wachsendem u abnehmen und für $u=0$ am größten sein; daher wird:

$$B_\nu < \frac{(2x)^{\nu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})\,2^{\nu-1}x^\nu}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\, du \quad (-\tfrac{1}{2}<\nu<+\tfrac{1}{2}).$$

Das hier auftretende Integral ist nach **1.** (28) gleich $\Pi(\nu-\frac{1}{2})$, so daß man erhält:

$$B_\nu < \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \qquad (-\tfrac{1}{2}<\nu<+\tfrac{1}{2}). \tag{11}$$

Hieraus folgt, daß sowohl J_0 als auch Y_0 für positive reelle Werte des Arguments zwischen den beiden Zweigen der schon in **22.** erwähnten Kurve $xy^2 = \frac{2}{\pi}$ verlaufen.

24. Die Funktionen J_0 und Y_0 für negative reelle Werte des Arguments. Aus **2.** (7) folgt:

$$J_0(-x) = J_0(x); \tag{1}$$

d. h. J_0 hat für negative Werte des Arguments dieselbe Größe wie für positive; aus **12.** (6a) folgt aber:

$$Y_0(-x) = Y_0(x) - 2(2k+1)iJ_0(x), \tag{2}$$

weil bekanntlich

$$\log(-x) = \log x + \log(-1) = \log x + (2k+1)\pi i$$

ist.

Hierin tritt die unbestimmte ganze Zahl k auf, woraus hervorgeht, daß Y_0 und ebenso Y_n nicht eine eindeutige, sondern eine unendlich vieldeutige Funktion ist wegen des Logarithmus, der darin auftritt. Mit demselben Rechte wie die bisher betrachtete Funktion Y_0, die für positive reelle Werte von x selbst reell war, hätte man auch eine Funktion Y_0 wählen können, die komplexe Werte für positive reelle Werte von x annimmt; nämlich eine Funktion, die von unserer Funktion um beliebige ganzzahlige Vielfache von $4iJ_0$ sich unterscheidet.

Derjenige Wert von Y_0, der für positive reelle Werte von x selbst reell ist, heißt der Hauptwert von Y_0; von ihm allein ist bisher die Rede gewesen, und auch später wird unter Y_0 immer der Hauptwert dieser Funktion gemeint.

$Y_0(-x)$ unterscheidet sich nach (2) von dem entsprechenden Werte für positives Argument um ein ungerades Vielfaches von $2iJ_0(x)$; als einfachsten Wert dieser vieldeutigen Funktion kann man wählen:

$$Y_0(-x) = Y_0(x) - 2iJ_0(x), \tag{3}$$

wo unter Y_0 der Hauptwert zu verstehen ist. Man erkennt hieraus, daß für negative reelle Werte des Arguments die Funktion Y_0 komplex wird und daß der reelle und imaginäre Bestandteil nach (3) in einfachster Weise aus den Funktionen Y_0 und J_0 erhalten wird. Nur an den Nullstellen von $J_0(x)$ wird die Funktion $Y_0(-x)$ reell; an denen von $Y_0(x)$ wird sie rein-imaginär. Nullstellen besitzt $Y_0(-x)$ nicht, da J_0 und Y_0 niemals gleichzeitig verschwinden.

25. Die Funktionen J_0 und Y_0 für rein-imaginäre Werte des Arguments. Wie der Verlauf der Funktionen $J_{\frac{1}{2}}$ und $Y_{\frac{1}{2}}$ für rein-imaginäre Werte des Arguments völlig verschieden ist von dem für reelle Argumente, so auch bei den Funktionen J_0 und Y_0.

Zunächst erkennt man aus der Definitionsgleichung 2. (7):

$$J_0(ix) = \sum \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\Pi\lambda\,\Pi\lambda}, \tag{1}$$



daß $J_0(ix)$ eine positive rellee Größe $I_0(x)$ ist, die mit wachsendem x wächst.

Aus **6.** (13) folgt:

$$
(2)\quad \begin{aligned} I_0(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{xu}+e^{-xu}}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{\pi}e^x\int_0^1 \frac{e^{-2vx}}{\sqrt{v-v^2}}\,dv. \end{aligned}
$$

Aus diesen Integralen ergibt sich leicht:

$$
I_0(x) > \frac{1}{\pi x}(e^x - e^{-x}),
$$

d. h. mit wachsendem x nimmt $J_0(ix)$ ähnlich wie die Exponentialfunktion zu.

Zwischen $J_0(ix)$ und den Funktionen mit reellem Argument bestehen einige Relationen. Aus **21.** (1) folgt für $y = i$ und $\nu = 0$:

$$
(3)\qquad I_0(x) = \sum_0^\infty \frac{x^\lambda}{\Pi\lambda} J_\lambda(x)
$$

und aus **21.** (5a):

$$
(4)\qquad I_0(x) = J_0(x) + 2\sum_{\lambda=1}^\infty J_{2\lambda}(x)\cdot F(\lambda, -\lambda, 1, -1).
$$

Sind die Werte der Funktionen $J_{2\lambda}$ bekannt, so kann man mit der letzten Formel die Funktion $J_0(ix)$ für nicht zu große Werte von x ziemlich bequem berechnen, wenn

$$
F(\lambda, -\lambda, 1, -1) = a_\lambda
$$

bekannt ist.

Für diese Zahlen gilt die Rekursionsformel:

$$
(2\lambda-1)(\lambda+1)\,a_{\lambda+1} = 4(3\lambda^2-1)\,a_\lambda - (\lambda-1)(2\lambda+1)\,a_{\lambda-1}.
$$

Die Werte für $\lambda = 1$ bis 10 sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

λ	a_λ
1	2
2	8
3	38
4	192
5	1002
6	5336
7	28814
8	157184
9	864146
10	4780008

Aus **12.** (6a) folgt:

$$Y_0(ix) = -\frac{2}{\pi}\left\{I_0(x)\log\frac{ix}{2} - \sum_0^\infty \frac{\Psi(\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}\right\};$$

für den Hauptwert von $Y_0(ix)$ ist nun

$$\log i = i\frac{\pi}{2},$$

also findet man:

$$(5)\quad Y_0(ix) = -\frac{2}{\pi}\left\{I_0(x)\log\frac{x}{2} - \sum_0^\infty \frac{(\lambda)\Psi}{\Pi\lambda\,\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}\right\} - i\cdot I_0(x).$$

Hieraus erkennt man, daß die Besselsche Funktion zweiter Art, abgesehen von dem $(-i)$-fachen der Besselschen Funktion erster Art, auch eine reelle Größe ist. Nach **16.** (7a) kann man (5) schreiben:

$$(6)\quad Y_0(ix) = \frac{2}{\pi}\left\{\Psi(0) - \log\frac{x}{2}\right\} I_0(x) + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{I_{2\lambda}(x)}{\lambda} - i\,J_0(x),$$

wenn man setzt:

$$(-1)^\lambda J_{2\lambda}(ix) = I_{2\lambda}(x);$$

es bedeutet dann $I_{2\lambda}(x)$ eine positive Größe.

Das Integral, das in **11.** für Y_ν gefunden wurde, kann für rein-imaginäre Werte des Arguments nicht benutzt werden, da es

nur unter der Voraussetzung gilt, daß x einen positiven reellen Bestandteil hat. Aber der Weg, der in **10.** zu diesen Formeln führte, wird auch hier eine Integralformel für $Y_0(ix)$ liefern. Dort hatte man gefunden, daß das Integral

$$(7) \qquad y = x^{\nu} e^{\mp ix} \int (v - v^2)^{\nu - \frac{1}{2}} e^{\pm 2ixv} dv$$

eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung ist, wenn die Grenzen des Integrals Null, Eins oder eine Nullstelle von $e^{\pm 2vix}$ sind. Ist nun x auf der positiven Hälfte der imaginären Achse gelegen, so kann als Grenze $\pm\infty$ gewählt werden, je nach dem Vorzeichen von ix. Man erhält so für $\nu = 0$ die Lösungen:

$$y_1 = e^x \int_0^\infty \frac{e^{-2xv}}{\sqrt{v - v^2}} dv = \int_{-1}^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{1 - u^2}} du$$

und

$$y_2 = e^{-x} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{2vx}}{\sqrt{v - v^2}} dv$$

$$= - ie^{-x} \int_0^\infty \frac{e^{-2vx}}{\sqrt{v + v^2}} dv$$

$$= - i \int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u^2 - 1}} du.$$

Nun ist:

$$y_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{1 - u^2}} du - i \int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u^2 - 1}} du,$$

also nach (2):

$$y_1 = \pi \cdot I_0(x) + y_2.$$

Es läßt sich nun zeigen, daß $iy_2 + \log x$ für $x = 0$ einen endlichen Wert besitzt, den man folgendermaßen findet. Es ist:

$$iy_2 = \int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{u}\,du + \int_1^\infty e^{-ux}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)du$$

$$= e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-ux}}{u+1}\,du + \int_1^\infty e^{-ux}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)du.$$

Ferner ist:

$$\log x = \int_0^\infty (e^{-u} - e^{-ux})\frac{du}{u}.$$

Durch Addition erhält man:

$$i e^x y_2 + \log x = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-ux}}{u(u+1)}\right\} du$$

$$+ e^x \int_1^\infty e^{-ux}\left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)du.$$

Setzt man nun $x = 0$, so wird das erste Integral rechts nach einer Formel von Dirichlet*) übergehen in $\Psi(0)$, das zweite aber wird $\log 2$. Denn es ist:

$$\int_1^a \left(\frac{1}{\sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{u}\right)du = \log\left(a + \sqrt{a^2-1}\right) - \log a$$

$$= \log\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\right).$$

Läßt man hierin a ins Unendliche wachsen, so erhält man den angegebenen Wert. Also wird

$$\lim\,(iy_2 + \log x)_{(x=0)} = \Psi(0) + \log 2,$$

oder es nähert sich iy_2, wenn x verschwindet, dem Werte

$$\Psi(0) - \log\frac{x}{2}.$$

---

*) Sur les intégrales Eulériennes, Crelle Journ., Bd. 15.

Das allgemeine Integral der Besselschen Differentialgleichung $AJ_0 + BY_0$ nähert sich aber nach (1) und (5) dem Werte:

$$A + \frac{2}{\pi}\left(\Psi(0) - \log\frac{x}{2}\right)B - iB,$$

also ist $i \cdot y_2$ dasjenige Integral, wofür

$$B = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad A = iB = i\frac{\pi}{2}$$

ist, d. h.

$$\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-ux}\,du}{\sqrt{u^2-1}} = Y_0(ix) + iJ_0(ix)$$

oder:

$$Y_0(ix) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u^2-1}}\,du - iI_0(x). \tag{8}$$

Bezeichnet man den reellen Bestandteil von $Y_0(ix)$ mit $L_0(x)$, so hat man aus (5), (6) und (8) die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} L_0(x) &= -\frac{2}{\pi}\left\{I_0(x)\log\frac{x}{2} - \sum_0^\infty \frac{\Psi(\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}\right\}, \\ &= \frac{2}{\pi}\left\{\Psi(0) - \log\frac{x}{2}\right\} I_0(x) + \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{I_{2\lambda}(x)}{\lambda}, \\ &= \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u^2-1}}\,du = \frac{2}{\pi}e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-2ux}}{\sqrt{u+u^2}}\,du. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man, daß $L_0(x)$ stets positiv ist; führt man im letzten Integral $2ux$ als neue Integrationsvariable ein, so findet man:

$$L_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{x}}e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-u}\,du}{\sqrt{u + \frac{u^2}{2x}}}, \tag{10}$$

und läßt man x unbegrenzt wachsen, so folgt:

$$L_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-x}. \qquad (x = \infty)$$

Während also $I_0(x)$ mit wachsendem x unbegrenzt wächst, wird

$$L_0(x) = Y_0(ix) + i\,J_0(ix)$$

mit unbegrenzt wachsendem x gegen Null konvergieren. Es beginnt $L_0(x)$ für $x = 0$ mit unendlich großen Werten und nimmt beständig ab, und zwar ist stets

$$L_0 < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-x}.$$

Es sei noch erwähnt, daß aus (10) sich eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende, semikonvergente Reihe ableiten läßt; man findet ähnlich wie in **14.**:

$$L_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-x} \sum (-1)^\lambda \frac{\Pi(\lambda - \frac{1}{2})\Pi(\lambda - \frac{1}{2})}{\pi\, \Pi\lambda} \left(\frac{1}{2x}\right)^\lambda$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-x} \left\{1 - \frac{1}{8x} + \frac{(1\cdot 3)^2}{2!}\left(\frac{1}{8x}\right)^2 - \frac{(1\cdot 3\cdot 5)^2}{3!}\left(\frac{1}{8x}\right)^3 + \cdots\right\};$$

bricht man diese Reihe beim n-ten Gliede ab, so ist der Fehler kleiner, als das $(n+1)$-te Glied sein würde.

26. Die Funktionen J_0 und Y_0 für $x = \left(\varrho, \frac{\pi}{4}\right)$. Wählt man x auf der Halbierungslinie des Winkels der positiven reellen und imaginären Achse, setzt man also $x = \varrho\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \varrho\sqrt{i}$, so ergibt sich aus **2.** (7):

$$(1)\quad J_0(\varrho\sqrt{i}) = \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{4\lambda}}{\Pi 2\lambda\, \Pi 2\lambda} - i\sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{4\lambda+2}}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(2\lambda+1)}.$$

Es wird also in diesem Falle J_0 eine komplexe Zahl, deren beide Bestandteile aus (1) sich leicht berechnen lassen, sobald ϱ nicht zu große Werte annimmt.

Aus **12.** (6a) folgt:

$$(2)\quad Y_0(\varrho\sqrt{i}) = -\frac{2}{\pi}\left\{J_0(\varrho\sqrt{i})\left(\log\frac{\varrho}{2} + \frac{1}{2}\log i\right) - \sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi\lambda}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2\lambda} \cdot i^\lambda\right\};$$

hieraus erhält man für den Hauptwert von Y_0 durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$
(3)\quad \begin{aligned}
Y_0(\varrho\sqrt{i}) = &-\frac{2}{\pi}\left\{\sum_0^\infty(-1)^\lambda \frac{\log\frac{\varrho}{2} - \Psi(2\lambda)}{\Pi 2\lambda\, \Pi 2\lambda}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{4\lambda} \right.\\
&\left. + \frac{\pi}{4}\sum_0^\infty(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{4\lambda+2}}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(2\lambda+1)}\right\}\\
&-\frac{2i}{\pi}\left\{\sum_0^\infty(-1)^\lambda \frac{\Psi(2\lambda+1) - \log\frac{\varrho}{2}}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(2\lambda+1)}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{4\lambda+2}\right.\\
&\left. + \frac{\pi}{4}\sum_0^\infty(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{4\lambda}}{\Pi 2\lambda\, \Pi 2\lambda}\right\}.
\end{aligned}
$$

Auf ähnlichem Wege wie in **25.** lassen sich auch hier Integrale finden für beide Funktionen. Es ist:

$$
(4)\qquad y = e^{\mp ix}\int_0^\infty \frac{e^{\pm 2ixv}}{\sqrt{v - v^2}}\, dv
$$

eine Lösung der Besselschen Differentialgleichung für $\nu = 0$, wenn der Integrationsweg für v so gewählt wird, daß $e^{\pm 2ixv}$ im Unendlichen verschwindet. Ist nun

$$
x = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),
$$

so wird dieser Zweck erreicht, wenn man einführt:

$$
(5)\qquad v = \pm u(\sin\vartheta + i\cos\vartheta),
$$

wobei u sämtliche positive reelle Werte zu durchlaufen hat. Wählt man in (4) und (5) zunächst das obere Zeichen, so findet man:

$$
(6)\quad y_1 = e^{-ix}\int_0^\infty \frac{(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)\, e^{-2u\varrho}\, du}{\sqrt{u}\,\sqrt{\sin\vartheta + u\cos 2\vartheta + i(\cos\vartheta - u\sin 2\vartheta)}}.
$$

Setzt man nun:

$$u = \frac{\cos(\omega - \vartheta)}{\sin\omega},$$

so wird:

$$du = -\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\omega},$$

$$\sin\vartheta + u\cos 2\vartheta = \frac{1}{\sin\omega}\left\{\sin\vartheta\sin\omega + \cos(\omega - \vartheta)(2\cos^2\vartheta - 1)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sin\omega}\left\{2\cos^2\vartheta\cdot\cos(\omega - \vartheta) - \cos\vartheta\cos\omega\right\}$$

$$= \frac{\cos\vartheta}{\sin\omega}\left\{\cos\omega + \cos(\omega - 2\vartheta) - \cos\omega\right\}$$

$$= \frac{\cos\vartheta\cos(\omega - 2\vartheta)}{\sin\omega},$$

ferner:

$$\cos\vartheta - u\sin 2\vartheta = \frac{\cos\vartheta\sin(\omega - 2\vartheta)}{\sin\omega},$$

und:

$$e^{-2u\varrho} = e^{-2\varrho\cos\vartheta\operatorname{cotg}\omega - 2\varrho\sin\vartheta}.$$

Führt man in dem Faktor vor dem Integral $x = (\varrho, \vartheta)$ ein, so findet man:

$$y_1 = e^{-\varrho(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\vartheta}\frac{\sqrt{\cos\vartheta}\left\{\cos\left(\frac{\omega}{2} - \vartheta\right) - i\sin\left(\frac{\omega}{2} - \vartheta\right)\right\}}{\sin\omega\sqrt{\cos(\omega - \vartheta)}}$$

$$\times(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)\, e^{-2\varrho\cos\vartheta\operatorname{cotg}\omega}\, d\omega$$

$$= \sqrt{\cos\vartheta}\, e^{-\varrho(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\vartheta}\frac{\left(\sin\frac{\omega}{2} + i\cos\frac{\omega}{2}\right) e^{-2\varrho\cos\vartheta\operatorname{cotg}\omega}}{\sin\omega\sqrt{\cos(\omega - \vartheta)}}\, d\omega$$

oder, wenn man den reellen Teil $\varrho\cos\vartheta$ der komplexen Zahl x zur Abkürzung mit ξ bezeichnet, so wird:

$$(7)\quad y_1 = \sqrt{\cos\vartheta}\, e^{-\xi \operatorname{tg}\vartheta} \int_0^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} \frac{\sin\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right) + i\cos\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega - \vartheta)}}\, e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega}\, d\omega.$$

Ähnlich ergibt sich bei Wahl des unteren Zeichens aus (4) und (5):

$$(8)\qquad y_2 = e^{ix} \int_0^{\infty} \frac{(\sin\vartheta + i\cos\vartheta)\, e^{-2u\varrho}\, du}{\sqrt{u}\sqrt{u\cos 2\vartheta - \sin\vartheta - i(u\sin 2\vartheta + \cos\vartheta)}},$$

und wenn man die Substitution:

$$u = \frac{\cos(\omega + \vartheta)}{\sin\omega}$$

ausführt:

$$(9)\quad y_2 = \sqrt{\cos\vartheta}\, e^{\xi \operatorname{tg}\vartheta} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\vartheta} \frac{\sin\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right) - i\cos\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega + \vartheta)}}\, e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega}\, d\omega.$$

Es ist nicht schwer, diese Formeln auf beliebige Werte von ν zu erweitern.

Auf ähnlichem Wege wie in **12.** läßt sich zeigen, daß die Grenzwerte für ein unbegrenzt wachsendes ϱ lauten:

$$y_1(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

$$y_2(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

Vergleicht man hiermit die Grenzwerte in **12.** (1) und (2), so findet man:

$$J_0(\varrho, \vartheta) = \frac{1}{\pi}(y_1 + y_2),$$

$$Y_0(\varrho, \vartheta) = -\frac{i}{\pi}(y_1 - y_2).$$

Also folgt aus (7) und (9):

$$\frac{\pi}{\sqrt{\cos\vartheta}} J_0(\varrho, \vartheta) = e^{-\xi \operatorname{tg} \vartheta} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} \frac{\sin\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega - \vartheta)}} e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega} d\omega$$

$$+ e^{\xi \operatorname{tg} \vartheta} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\vartheta} \frac{\sin\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega + \vartheta)}} e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega} d\omega$$

(10)

$$+ i \left\{ e^{-\xi \operatorname{tg} \vartheta} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} \frac{\cos\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega - \vartheta)}} e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega} d\omega \right.$$

$$\left. - e^{\xi \operatorname{tg} \vartheta} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\vartheta} \frac{\cos\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega + \vartheta)}} e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega} d\omega \right\}$$

und:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\cos\vartheta}} Y_0(\varrho, \vartheta) = e^{-\xi \operatorname{tg} \vartheta} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}+\vartheta} \frac{\cos\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega - \vartheta)}} e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega} d\omega$$

$$- e^{\xi \operatorname{tg} \vartheta} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\vartheta} \frac{\cos\left(\xi + \frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega \sqrt{\cos(\omega + \vartheta)}} e^{-2\xi \operatorname{cotg}\omega} d\omega$$

(11)

$$
-i\left\{e^{-\xi\operatorname{tg}\vartheta}\int_0^{\frac{\pi}{2}+\vartheta}\frac{\sin\left(\xi+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos(\omega-\vartheta)}}\,e^{-2\xi\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega\right.
$$

$$
\left.-e^{\xi\operatorname{tg}\vartheta}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\vartheta}\frac{\sin\left(\xi+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos(\omega+\vartheta)}}\,e^{-2\xi\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega\right\}.
$$

Um auf unseren speziellen Fall zu kommen, hat man hierin $\vartheta=\frac{\pi}{4}$ zu setzen und erhält:

$$
\pi\sqrt{2}\,J_0(\varrho\sqrt{i})=e^{-\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega
$$

$$
+e^{\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega
$$

(12)

$$
+i\left\{e^{-\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega\right.
$$

$$
\left.-e^{\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega\right\}
$$

und:

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
\pi\sqrt{2}\,Y_0(\varrho\sqrt{i}) = {} & e^{-\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int\limits_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\cos\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega \\
& + e^{\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega \\
& - i\left\{e^{-\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega\right. \\
& \left. - e^{\frac{\varrho}{\sqrt{2}}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\omega\sqrt{\cos\left(\omega+\frac{\pi}{4}\right)}}\,e^{-\varrho\sqrt{2}\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega\right\}.
\end{aligned}
$$

Die in den Integranden dieser Formeln auftretenden Funktionen sind sämtlich positiv mit Ausnahme der beiden Funktionen

$$\sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right)\quad\text{und}\quad\cos\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}}+\frac{\omega}{2}\right).$$

Ähnlich wie in **23.** lassen sich mithin Schlüsse über das Vorzeichen wenigstens der reellen Bestandteile dieser beiden Funktionen ziehen. Ist nämlich $\frac{\varrho}{\sqrt{2}} = \xi \leqq \frac{7}{8}\pi$, so ist das Integral mit den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{4}$, welches im Zähler die Funktion Sinus enthält, positiv; und ist $\xi \leqq \frac{5}{8}\pi$, so ist das entsprechende Integral mit den Grenzen 0 und $\frac{3}{4}\pi$ positiv. Daher ist der reelle Bestandteil von $J_0(\varrho\sqrt{i})$ positiv, sobald $\xi \leqq \frac{5}{8}\pi$ ist. Man über-

sieht sehr leicht, daß dieser Satz sich verallgemeinern läßt. Ist nämlich

$$\xi = k\pi + \xi',$$

wo k eine positive ganze Zahl mit Einschluß der Null und $0 \leqq \xi' \leqq \frac{3}{8}\pi$ ist, so ist der reelle Bestandteil von $J_0(\varrho\sqrt{i})$ positiv oder negativ, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Zwischen $\xi = (k+\frac{3}{8})\pi$ und $\xi = (k+1)\pi$ liegt allemal eine Nullstelle des reellen Bestandteils von $J_0(\varrho\sqrt{i})$.

Ebenso ergibt sich: Ist $\xi \leqq \frac{1}{8}\pi$, so ist der reelle Bestandteil von $Y_0(\varrho\sqrt{i})$ positiv; ist

$$\xi = \frac{2k+1}{2}\pi + \xi',$$

wo k und ξ denselben Bedingungen wie oben genügen, so ist der reelle Bestandteil von $Y_0(\varrho\sqrt{i})$ negativ oder positiv, je nachdem k gerade oder ungerade ist. Zwischen $\xi = (k+\frac{1}{8})\pi$ und $(k+\frac{1}{2})\pi$ liegt allemal eine Nullstelle des reellen Bestandteils von $Y_0(\varrho\sqrt{i})$.

Aus (9) erkennt man, daß innerhalb der Grenzen der Integration $e^{-\xi\operatorname{cotg}\omega}$ kleiner ist als $e^{-\xi\operatorname{tg}\vartheta}$; somit sieht man, daß sowohl der reelle als der imaginäre Bestandteil von y_2 dem absoluten Betrage nach kleiner ist als

$$\sqrt{\cos\vartheta}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\vartheta} \frac{e^{-\xi\operatorname{cotg}\omega}}{\sin\omega\sqrt{\cos(\omega+\vartheta)}}\,d\omega;$$

läßt man hierin ξ unbegrenzt wachsen, so konvergiert dieser Ausdruck gegen Null. Somit findet man, daß allgemein das Integral

$$A \cdot y_2 = B\{J_0(\varrho, \vartheta) - i\,Y_0(\varrho, \vartheta)\}$$

mit wachsendem ϱ gegen Null konvergiert.

27. Die Nullstellen der Besselschen Funktionen in ihrer Abhängigkeit vom Parameter. In den folgenden Nummern soll der Verlauf der Funktionen mit beliebigem Parameter für reelle positive Werte der Variablen skizziert werden; man wird ein einigermaßen vollständiges Bild vom Verlaufe derselben er-

halten, wenn man die Lage ihrer Nullstellen, ihrer Maxima, Minima und ihrer Wendepunkte kennt. Allgemeine Sätze über die genaue Lage dieser Punkte existieren nicht, und man muß sich begnügen, nicht zu weite Grenzen für deren Lage zu ermitteln und zu untersuchen, wie diese Punkte sich verschieben, wenn der Parameter sich verändert.

Dieser letzte Punkt soll zunächst ins Auge gefaßt werden.

Durch Differentiation der Gleichung **5.** (8) nach dem Parameter ν ergibt sich:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)\frac{\partial z}{\partial \nu} = \frac{2\nu}{x^2} z.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit z, **5.** (8) mit $\frac{\partial z}{\partial \nu}$ und subtrahiert diese Gleichung von der ersten, so findet man:

$$z \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) - \frac{\partial z}{\partial \nu} \cdot \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{2\nu}{x^2} z^2$$

oder:

$$\frac{d}{dx}\left\{z \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) - \frac{\partial z}{\partial \nu} \cdot \frac{dz}{dx}\right\} = \frac{2\nu}{x^2} z^2.$$

Für z kann man nach **5.** (9) einsetzen:

$$z = \sqrt{x}\, J_\nu(x),$$

so daß man bei Benutzung der Abkürzung:

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = V_\nu, \quad \frac{\partial^2 J_\nu}{\partial x \partial \nu} = V_\nu'$$

erhält:

$$\frac{d}{dx}\left\{\sqrt{x}\, J_\nu \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\, V_\nu\right) - \sqrt{x}\, V_\nu \cdot \frac{d\left(\sqrt{x}\, J_\nu\right)}{dx}\right\} = \frac{2\nu}{x} J_\nu^2$$

oder:

$$\frac{d}{dx}\left\{x\left(J_\nu V_\nu' - V_\nu J_\nu'\right)\right\} = \frac{2\nu}{x} J_\nu^2,$$

folglich durch Integration:

$$(1) \qquad \Big[x\left(J_\nu V_\nu' - J_\nu' V_\nu\right)\Big]_a^b = 2\nu \int_a^b J_\nu^2(x) \frac{dx}{x}.$$

Die entsprechende Gleichung gilt auch für die Funktion zweiter Art; die Grenzen a und b können beliebig gewählt werden, jedoch darf die Zahl Null nur als Grenze gewählt werden bei Funktionen erster Art und wenn $\nu > 0$ ist. Auf diesen Fall wollen wir uns hier beschränken.

Es sei $a = 0$ und $b = \vartheta$, wo ϑ eine Wurzel der Gleichung

$$J_\nu(\vartheta) = 0 \tag{2}$$

bedeutet; dann folgt aus (1):

$$V_\nu(\vartheta) = -\frac{2\nu}{\vartheta \cdot J_\nu'(\vartheta)} \int_0^\vartheta J_\nu^2(x) \frac{dx}{x}. \tag{3}$$

Man kann nun in (2) die Größe ϑ als eine implizite Funktion von ν betrachten; nach bekannten Regeln wird alsdann:

$$\frac{d\vartheta}{d\nu} = -V_\nu(\vartheta) : J_\nu'(\vartheta), \tag{4}$$

und setzt man aus (3) in (4) ein:

$$\frac{d\vartheta}{d\nu} = \frac{2\nu}{\vartheta} \cdot \frac{1}{[J_\nu'(\vartheta)]^2} \int_0^\vartheta J_\nu^2(x) \frac{dx}{x}. \tag{5}$$

Aus **13.** (3), (4) und (5) erkennt man sofort, daß J_ν und J_ν' nicht zugleich verschwinden können, ebensowenig wie J_ν und $J_{\nu-1}$ oder J_ν und J_ν''.

Daher ist die im Nenner von (5) auftretende Größe $J_\nu'(\vartheta)$ stets von Null verschieden, $\frac{d\vartheta}{d\nu}$ selbst also stets endlich und, wie man sofort erkennt, immer positiv d. h.

Jede einzelne Nullstelle der Besselschen Funktionen erster Art mit positivem Parameter ist eine stetige Funktion des Parameters, die mit wachsendem Parameter wächst.

Derselbe Satz gilt auch für die Funktionen zweiter Art, doch ist sein Beweis erheblich schwieriger.

Bezeichnet ε eine Wurzel von $J_\nu'(\varepsilon) = 0$, so folgt aus (1) nach derselben Methode

$$\frac{d\varepsilon}{d\nu} = \frac{2\nu\varepsilon}{\varepsilon^2 - \nu^2} \cdot \frac{1}{J_\nu^2(\varepsilon)} \int_0^\varepsilon J_\nu^2(x) \frac{dx}{x}. \tag{6}$$

Nun folgt aus Gleichung **17.** (22a), daß ε größer sein muß als ν, denn sonst würde deren rechte Seite negativ, die linke aber positiv sein. Daher folgt aus (6):

Die Maxima und Minima der Besselschen Funktionen erster Art mit positivem Parameter sind stetige Funktionen des Parameters, die mit wachsendem Parameter wachsen.

28. Die Lage der ersten ausgezeichneten Stellen. Wenn der Parameter $\nu \leqq 1$ ist, so kann man die ungefähre Lage der einzelnen Nullstellen auf demselben Wege finden, der in **23.** für $J_0(x)$ eingeschlagen wurde. Aus dem Integral **11.** (4) folgt:

Ist $\nu < \frac{1}{2}$, so liegen die einzelnen Nullstellen von $J_\nu(x)$ zwischen $(k + \frac{3}{4})\pi$ und $(k+1)\pi$, wo k alle ganzzahligen Werte mit Einschluß der Null annehmen kann.

Die im Nullpunkte gelegene Nullstelle ist hier wie im folgenden nie mitgerechnet.

Ist $1 \geqq \nu > \frac{1}{2}$, so liegen die einzelnen Nullstellen von $J_\nu(x)$ zwischen $k\pi$ und $(k + \frac{1}{4})\pi$, wo k alle ganzzahligen Werte mit Ausschluß der Null annehmen kann.

Solche einfachen Sätze über alle Nullstellen gelten für größere Parameter, die nun ausschließlich betrachtet werden sollen, nicht.

Setzt man:

$$J_\nu(x) = \sum (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} = \sum (-1)^\lambda a_\lambda,$$

so folgt:

$$\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} = \frac{x^2}{4(\lambda+1)(\nu+\lambda+1)};$$

dieser Quotient ist für jeden Wert von λ ein echter Bruch, sobald $x < 2\sqrt{\nu+1}$ ist. Für solche Werte von x ist daher $J_\nu(x)$ sicher positiv; ähnlich ergibt sich, daß $J_\nu'(x)$ und $J_\nu''(x)$ für kleine positive Werte von x ebenfalls positiv sind. Es wird demnach vor der ersten Nullstelle von $J_\nu(x)$ ein positiver Maximalwert und davor ein Wendepunkt dieser Funktion liegen. Nach den beiden in **27.** bewiesenen Sätzen sind an diesem ersten Wendepunkt nicht nur J_ν und J_ν' positiv, sondern auch $J_{\nu+p}$ und $J'_{\nu+p}$, wo p eine positive Zahl bedeutet.

Aus den Relationen in **4.** lassen sich leicht folgende Formeln beweisen:

$$xJ_{\nu+1} = [x^2 - \nu(\nu-1)]J_\nu + x^2 J_\nu'',$$
$$x^2 J'_{\nu+1} = \nu(\nu^2 - 1 - x^2)J_\nu - x^2(\nu+1)J_\nu''.$$

Nach der eben gemachten Bemerkung ergibt sich aus diesen Gleichungen, wenn man $J'' = 0$ setzt:

Die erste Nullstelle von J_ν'' liegt zwischen $\sqrt{\nu(\nu-1)}$ und $\sqrt{(\nu+1)(\nu-1)}$.

Ebenso folgt aus den Hauptformeln in **4.**:

$$x^2 J_{\nu+2} = [2\nu(\nu+1-x^2]J_\nu - 2x(\nu+1)J_\nu'$$

und hieraus durch Differentiation mit Rücksicht auf **2.** (1):

$$x^3 J'_{\nu+2} = 2(\nu+1)[x^2 - \nu(\nu+2)]J_\nu$$
$$- x[x^2 - 2(\nu+1)(\nu+2)]J_\nu'.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

Die erste Nullstelle von J_0' liegt zwischen $\sqrt{\nu(\nu+2)}$ und $\sqrt{2\nu(\nu+1)}$.

Aus **4.** (6) folgt, wenn man $p = 3$ und $\nu+1$ an Stelle von ν setzt:

$$x^3 J_{\nu+4} = 4(\nu+2)\{2(\nu+1)(\nu+3) - x^2\}J_{\nu+1}$$
$$- \{4(\nu+2)(\nu+3) - x^2\}xJ_\nu.$$

An der ersten Nullstelle von J_ν muß die erste geschweifte Klammer positiv sein; da ferner diese Nullstelle nach der ersten von J_ν' liegt, so folgt:

Die erste Nullstelle von J_ν liegt zwischen $\sqrt{\nu(\nu+2)}$ und $\sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}$.

29. Die Lage der höheren Nullstellen von J_ν. Es ist bisher nicht gelungen, ähnliche einfache Grenzen für die zweite und die nächstfolgenden Nullstellen für größere Werte des Parameters ν anzugeben; für die Lage der höheren Nullstellen dagegen lassen sich ziemlich enge Grenzen angeben, und zwar mit Hilfe der semikonvergenten Entwicklungen in **14.**

Es läßt sich nämlich zeigen, daß die dort mit P_ν und Q_ν bezeichneten Funktionen stets positiv sind, sobald das Argument x eine bestimmte Größe überschreitet. Schreibt man:

$$P_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^\lambda a_\lambda + R'_{m+1} \tag{1}$$

in der Form:

$$P_\nu = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots,$$

so wird P_ν positiv sein, wenn jede Gruppe positiv ist, also wenn der Quotient $\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda}$ kleiner als 1 ist, zunächst abgesehen vom Rest R'_{m+1}. Es ist aber nach **14.** (8):

$$\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} = \frac{[\nu^2 - (2\lambda + \frac{1}{2})^2][\nu^2 - (2\lambda + \frac{3}{2})^2]}{4x^2(2\lambda + 1)(2\lambda + 2)}$$

und speziell:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{(\nu^2 - \frac{1}{4})(\nu^2 - \frac{9}{4})}{8x^2}.$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, daß, wenn $\frac{a_1}{a_0} \leqq 1$ ist, der Bruch $\frac{a_{\lambda+1}}{a_\lambda} < 1$ sein wird, sobald die Faktoren im Zähler positiv sind und auch sicher dann noch, wenn nur der erste, aber nicht mehr der zweite Faktor positiv ist, d. h. wenn:

$$\nu - \tfrac{3}{2} < 2\lambda < \nu - \tfrac{1}{2}$$

ist. Wenn alle Glieder der Reihe (1) abwechselndes Vorzeichen haben, und wenn man vom Reste absehen dürfte, wäre P_ν positiv, sobald:

$$8x^2 > (\nu^2 - \tfrac{1}{4})(\nu^2 - \tfrac{9}{4}) \tag{2}$$

ist. Die erste Bedingung kann man stets erfüllen; denn nach **14.** (6a) muß für den Index des letzten Gliedes a_m die Bedingung erfüllt sein:

$$m > \frac{\nu}{2} - \frac{5}{4}.$$

Die erste ganze Zahl, die größer ist als $\frac{\nu}{2} - \frac{5}{4}$, ist kleiner als $\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}$ (von dem Grenzwert, daß $\frac{\nu}{2} - \frac{5}{4}$ selbst eine ganze Zahl ist, kann abgesehen werden, weil dann die Reihe (1) von selbst abbricht). Daher kann man m stets so wählen, daß:

$$\nu - \tfrac{5}{2} < 2m < \nu - \tfrac{1}{2} \tag{3}$$

ist. Bei solcher Wahl von m folgt aus **14.** (6), daß sämtliche Glieder von P_ν alternierendes Vorzeichen haben, und daß

$$|R'_{m+1}| < |a_m|,$$

sobald x der obigen Ungleichung gemäß gewählt wird.

Ist nun m gerade, so ist a_m positiv und daher

$$a_m - |R'_{m+1}|$$

auch positiv, also ist in diesem Fall P_ν positiv. Ist aber m ungerade, so hat man zu untersuchen, ob

$$a_{m-1} - a_m - |R'_{m+1}|$$

positiv ist. Dies ist sicher der Fall, wenn

$$a_{m-1} - 2a_m$$

positiv ist, und es soll daher diese Differenz ins Auge gefaßt werden. Versteht man unter ε einen positiven echten Bruch, so hat man nach (3) zu setzen:

$$\frac{\nu}{2} - \frac{1}{4} = m + \varepsilon \quad \text{oder} \quad \nu - \frac{1}{2} = 2m + 2\varepsilon.$$

Aus **14.** (6) folgt alsdann:

$$\begin{aligned} a_{m-1} - 2a_m &= \frac{\Pi(4m + 2\varepsilon - 2)}{\Pi(2m - 2)\,\Pi(2\varepsilon + 2)} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2m-2} \\ &\quad - \frac{2\,\Pi(4m + 2\varepsilon)}{\Pi 2m\,\Pi 2\varepsilon} \left(\frac{1}{2x}\right)^{2m} \\ &= \frac{\Pi(4m + 2\varepsilon - 2)}{\Pi 2m\,\Pi 2\varepsilon (2x)^{2m}} \{2m(2m - 1)4x^2 \\ &\quad - 2(4m + 2\varepsilon)(4m + 2\varepsilon - 1)(2\varepsilon + 2)(2\varepsilon + 1)\}. \end{aligned}$$

Führt man in der geschweiften Klammer für x den kleinstmöglichen Wert durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} 8x^2 &= (\nu^2 - \tfrac{1}{4})(\nu^2 - \tfrac{9}{4}) \\ &= (2m + 2\varepsilon - 1)(2m + 2\varepsilon)(2m + 2\varepsilon + 1)(2m + 2\varepsilon + 2) \end{aligned}$$

ein und setzt im Minuenden ε gleich 0 und im Subtrahenden ε gleich 1, so findet man als Bedingung dafür, daß die Differenz positiv ist:

$$m^2(2m-1)^2(2m+1)(m+1) > 12(2m+1)(4m+1).$$

Dies ist sicher der Fall, wenn:

$$m^2(2m-1)^2 > 48,$$

und diese Ungleichheit ist für $m = 3$ schon erfüllt; da nur ungerade Werte von m in Betracht kommen, so ist allein der Fall $m = 1$ ausgeschlossen, d. h. die Parameter ν von $2\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ fallen nicht unter diese Betrachtung.

Eine leichte Spezialuntersuchung, die hier übergangen werden soll, lehrt, daß die folgenden Ergebnisse auch für diese Parameter Geltung behalten. Hierdurch ist nun gezeigt, daß P_ν positiv ist, sobald die Bedingung (2) erfüllt ist.

Führt man dieselben Überlegungen für Q_ν durch, so findet man, daß Q_ν positiv ist, sobald

$$24x^2 > \left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{25}{4}\right),$$

und diese Bedingung ist sicher erfüllt, sobald (2) erfüllt ist.

Die Funktionen $P_\nu(x)$ und $Q_\nu(x)$ sind positiv, sobald die Bedingung (2) erfüllt ist.

Aus diesem Satze und den Gleichungen **14.** (2) ergibt sich, daß für solche Werte von x, wofür $\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$ und $\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$ gleiche Vorzeichen haben, eine Nullstelle von J_ν nicht existiert, sondern nur für solche Werte, wofür beide Funktionen entgegengesetztes Zeichen haben. Dies tritt ein, wenn das Argument der trigonometrischen Funktionen zwischen $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ und $(2k+2)\frac{\pi}{2}$ liegt, worin k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Setzt man diese Grenzwerte ein, so findet man:

Sobald die Bedingung

$$8x^2 > (\nu^2 - \tfrac{1}{4})(\nu^2 - \tfrac{9}{4})$$

erfüllt ist, liegen die Nullstellen von J_ν in den Intervallen von

$$x = \left(2k + \nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x = \left(2k + \nu + \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2},$$

worin k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Ist im speziellen ν eine gerade ganze Zahl, so liegen die höheren Nullstellen in den Intervallen zwischen $(k + \frac{1}{4})\pi$ und $(k + \frac{3}{4})\pi$; ist ν eine ungerade ganze Zahl in den Intervallen zwischen $(k - \frac{1}{4})\pi$ und $(k + \frac{1}{4})\pi$.

Ebenso findet man:

Sobald die Bedingung

$$8x^2 > (\nu^2 - \tfrac{1}{4})(\nu^2 - \tfrac{9}{4})$$

erfüllt ist, liegen die Nullstellen von Y_ν in den Intervallen von

$$x = \left(2k + \nu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x = \left(2k + \nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2},$$

worin k eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Ist im speziellen ν eine gerade ganze Zahl, so liegen die höheren Nullstellen in den Intervallen von $(k - \frac{1}{4})\pi$ bis $(k + \frac{1}{4})\pi$; ist ν eine ungerade ganze Zahl in den Intervallen von $(k + \frac{1}{4})\pi$ bis $(k + \frac{3}{4})\pi$.

Aus diesen Ergebnissen in Verbindung mit denen der letzten Nummer erkennt man, daß die Gestalt der Kurve, welche die Funktion J_ν darstellt, für größere Werte des Parameters wesentlich anders aussieht als für kleine Werte. In Fig. 3 ist die Kurve für J_7 gezeichnet. Es besitzt nämlich die Kurve nicht von Anfang an die Wellenform, sondern sie steigt zuerst ganz allmählich zu einem Maximum an, das bald nach der Stelle $x = \nu$ eintritt, dann erst nimmt sie Wellenform an, deren Knotenpunkte für größere Werte des Arguments in Abständen aufeinander folgen, die sich der Grenze π nähern.

Daß außer diesen reellen Nullstellen die Funktion J_ν keine komplexen besitzt, erkennt man folgendermaßen. Setzt man $x = (\varrho, \vartheta)$ in **2.** (7) ein, so findet man:

$$(4) \qquad \frac{J_\nu}{x^\nu} = \sum (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{2\lambda}(\cos 2\lambda\vartheta + i \sin 2\lambda\vartheta)}{\Pi\lambda\, \Pi(\nu+\lambda)};$$

und setzt man den konjugierten komplexen Wert $(\varrho, -\vartheta)$ ein, so erhält man statt (4) den konjugierten komplexen Wert. Existiert

daher eine komplexe Nullstelle α von J_ν, so ist auch der zu α konjugierte Wert β eine Nullstelle von J_ν. Multipliziert man diese Zahlen α und β mit derselben positiven Zahl x, so bleiben sie konjugierte Zahlen, und das Produkt $J_\nu(\alpha x)\, J_\nu(\beta x)$ ist eine positive reelle Zahl, weil es das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen ist.

Würden nun α und β ein Paar konjugierter komplexer Nullstellen von J_ν sein, so würde die linke Seite von **17.** (21a) von Null verschieden sein, während die rechte Null ist; daraus folgt:

Die Funktion $J_\nu(x)$ besitzt keine komplexen Nullstellen.

Die Gleichung **17.** (19) kann man schreiben:

$$\frac{4\nu^2-1}{x}\int_x^\infty J_\nu^2(u)\frac{du}{u^2} = \frac{4}{\pi x} - \left\{J_\nu^2 + \left(\frac{1}{x}J_\nu + J_\nu'\right)^2 + (J_\nu')^2 + \left(1-\frac{2\nu^2}{x^2}\right)J_\nu^2\right\}.$$

Ist nun $x > \nu\sqrt{2}$, so sind sämtliche vier Summanden der geschweiften Klammer positiv; da die linke Seite für $\nu > \frac{1}{2}$ auch positiv ist, so muß sein:

$$J_\nu^2 < \frac{4}{\pi x}.$$

Da dieselbe Integralgleichung für Y_ν gilt, so erhält man:

Ist $x > \nu\sqrt{2}$ und $\nu > \frac{1}{2}$, so ist sowohl

$$|J_\nu| < \sqrt{\frac{4}{\pi x}} \quad \text{als auch} \quad |Y_\nu| < \sqrt{\frac{4}{\pi x}}.$$

Bedeutet x in **17.** (19) eine Nullstelle von J_ν, so geht die Gleichung über in:

$$\frac{4\nu^2-1}{x}\int_x^\infty J_\nu^2(u)\frac{du}{u^2} = \frac{4}{\pi x} - 2(J_\nu')^2 = \frac{4}{\pi x} - 2J_{\nu-1}^2 = \frac{4}{\pi x} - 2J_{\nu+1}^2;$$

also:

Ist $J_\nu(x) = 0$, so ist sowohl $|J_{\nu-1}|$, $|J_{\nu+1}|$ als auch $|J_\nu'| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$; und ist $Y_\nu(x) = 0$, so ist sowohl $|Y_{\nu-1}|$, $|Y_{\nu+1}|$ als auch $Y_\nu' < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$.

Mit Hilfe dieses Satzes folgt nun aus **13.** (3) oder (4):

Ist $J_\nu(x) = 0$, so ist $|Y_\nu| > \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$, und ist $Y_\nu(x) = 0$, so ist $|J_\nu| > \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$.

Aus diesen letzten Sätzen sieht man, daß die Kurven, die J_ν und Y_ν für positive reelle Werte von $x > \nu\sqrt{2}$ darstellen, zwischen den zwei im Unendlichen zusammentreffenden, gegen die Abszissenachse symmetrischen Zweigen der Kurve $xy^2 = \frac{4}{\pi}$ verlaufen; daß dagegen die entsprechenden Zweige von $xy^2 = \frac{2}{\pi}$ an bestimmten Stellen, wie groß auch das Argument werden mag, überschritten werden, wie dies in Fig. 3 zu erkennen ist.

Die Funktionen J und Y, deren Parameter kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, verlaufen zwischen den Zweigen der Kurve $xy^2 = \frac{2}{\pi}$, ohne sie zu treffen; jede Welle der Funktionen $J_{\frac{1}{2}}$ und $Y_{\frac{1}{2}}$ berührt diese Zweige, und jede Welle der Funktionen mit größerem Parameter durchschneidet sie.

Anhang.

30. Zusammenstellung der wichtigsten Formeln. Das allgemeine Integral der Besselschen Differentialgleichung:

2. (1) $$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

lautet:

11. (6) $$y = c_1 J_\nu + c_2 Y_\nu.$$

---

4. (1) $$2J'_\nu = J_{\nu-1} - J_{\nu+1}.$$

4. (1a) $$J'_0 = -J_1.$$

4. (2) $$\frac{2\nu}{x} J_\nu = J_{\nu-1} + J_{\nu+1}.$$

3. (3) $$J_{-n} = (-1)^n J_n.$$

Die nämlichen vier Formeln gelten für die Funktion Y.

12. (4) $$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} J_{-\nu}(x) - \operatorname{cotg} \nu\pi J_\nu(x).$$

12. (4a) $$Y_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n J_{-(n+\frac{1}{2})}(x).$$

13. (3) $$Y_\nu J'_\nu - J_\nu Y'_\nu = \frac{2}{\pi x}.$$

13. (4) $$Y_\nu J_{\nu-1} - J_\nu Y_{\nu-1} = \frac{2}{\pi x}.$$

---

2. (7) $$\begin{cases} J_\nu(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda} \\ \quad = \frac{x^\nu}{2^\nu \Pi\nu}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot(2\nu+2)(2\nu+4)} - \cdots\right\}. \end{cases}$$

2. (7a) $$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$

2. (7b) $$J_1(x) = \frac{x}{2}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots\right\}.$$

7. (1) $$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot \sin x.$$

3. (1) $$J_{-\nu}(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\lambda}{\Pi\lambda\,\Pi(-\nu+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2\lambda}.$$

7. (3) $$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot \cos x.$$

16. (5) $$Y_{n+\varepsilon} = -J_{n+\varepsilon}\operatorname{cotg}\varepsilon\pi + \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{n} \frac{\Pi n\,\Pi(-\varepsilon)\,\Pi(\lambda+\varepsilon-1)}{\Pi\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^\lambda J_{n-\lambda-\varepsilon}.$$

12. (6) $$Y_n(x) = -\frac{2}{\pi}J_n(x)\log\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_0^\infty (-1)^\lambda \frac{\Psi(\lambda)+\Psi(n+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(n+\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_0^{n-1} \frac{\Pi(n-\lambda-1)}{\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda}.$$

16. (7) $$Y_n = \frac{2}{\pi}\left\{\Psi(n) - \log\frac{x}{2}\right\}J_n + \frac{2}{\pi}\sum_{\lambda=1}^\infty (-1)^\lambda \frac{n+2\lambda}{\lambda(n+\lambda)} J_{n+2\lambda} +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\Pi n}{\lambda\,\Pi(n-\lambda)}\left(\frac{2}{x}\right)^\lambda J_{n-\lambda}.$$

16. (6) $$Y_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{\Pi n \,\Pi(\lambda - \frac{1}{2})}{\Pi \lambda \,\Pi(n-\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{\lambda} J_{n-\lambda-\frac{1}{2}}.$$

12. (6a) $$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\left\{J_0(x)\log\frac{x}{2} - \sum_{0}^{\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\Psi(\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}\right\}.$$

12. (6b) $$\frac{\pi}{2}Y_0(x) =$$
$$= \left[\Psi(0) - \log\frac{x}{2}\right]J_0 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1+\frac{1}{2}}{2!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \cdots$$

16. (7a) $$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{\Psi(0) - \log\frac{x}{2}\right\}J_0(x) + \frac{4}{\pi}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda}J_{2\lambda}(x).$$

---

14. (2) $$\begin{cases} J_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left\{P_\nu(x)\sin\left(x - \dfrac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_\nu(x)\cos\left(x - \dfrac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right\} \\ Y_\nu(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left\{P_\nu(x)\cos\left(x - \dfrac{2\nu-1}{4}\pi\right) - Q_\nu(x)\sin\left(x - \dfrac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right\}. \end{cases}$$

14. (6) $$P_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{m}(-1)^{\lambda}\frac{\Pi(\nu+2\lambda-\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda)\,\Pi(\nu-2\lambda-\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2\lambda} + R'_{m+1},$$

wo:

(6a) $$|R'_{m+1}| < \frac{\Pi(\nu+2m+\frac{3}{2})}{\Pi(2m+2)\,\Pi(\nu-2m-\frac{5}{2})}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2m+2}$$

für:

$$2m > \nu - \tfrac{5}{2}.$$

14. (6b) $$P_0(x) = 1 - \frac{1^2\cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{4!\,(8x)^4} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdots 11^2}{6!\,(8x)^6} + \cdots$$

14. (7) $$Q_\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{m}(-1)^{\lambda}\frac{\Pi(\nu+2\lambda+\frac{1}{2})}{\Pi(2\lambda+1)\,\Pi(\nu-2\lambda-\frac{3}{2})}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2\lambda+1} + S'_{m+1};$$

wo:

(7a) $$|S'_{m+1}| < \frac{\Pi(\nu+2m+\frac{5}{2})}{\Pi(2\lambda+3)\,\Pi(\nu-2m-\frac{7}{2})}\left(\frac{1}{2x}\right)^{2\lambda+3}$$

für:

$$2m > \nu - \tfrac{7}{2}.$$

14. (7b) $$Q_0(x) = -\frac{1}{8x} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots 9^2}{5!\,(8x)^5} + \cdots$$

12. (1) $$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) \qquad (x = \infty).$$

12. (2) $$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos\left(x - \frac{2\nu - 1}{4}\pi\right) \qquad (x = \infty).$$

---

12. (5) $$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = J_\nu \log\frac{x}{2} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda \frac{\Psi(\nu+\lambda)}{\Pi\lambda\,\Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2\lambda}.$$

15. (7) $$\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu} = \left\{\log\frac{x}{2} - \Psi(\nu)\right\} J_\nu(x) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\nu + 2\mu}{\mu(\nu+\mu)} J_{\nu+2\mu}(x).$$

---

15. (1) $$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda} J_{\nu+2\lambda}.$$

15. (8) $$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu = \sum_0^\infty \frac{\Pi\nu}{\Pi\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda J_{\nu+\lambda}.$$

15. (5) $$\sin x = 2\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda J_{2\lambda+1}(x).$$

15. (6) $$\cos x = J_0(x) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda J_{2\lambda}(x).$$?

20. (2) $$J_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} J_{\nu-\lambda}(x) J_\lambda(y).$$

20. (5) $$J_0(x+y) = J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda J_\lambda(x) J_\lambda(y).$$

20. (4) $$Y_\nu(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} Y_{\nu-\lambda}(x) J_\lambda(y).$$

20. (6) $$Y_0(x+y) = Y_0(x)J_0(y) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda Y_\lambda(x) J_\lambda(y).$$

21. (1) $$J_\nu(xy) = y^\nu \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(1-y^2)^\lambda}{\Pi\lambda} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda J_{\nu+\lambda}(x).$$

21. (5) $$\frac{\Pi\nu}{y^\nu} J_\nu(xy) = \\ = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(\nu+2\lambda)\,\Pi(\nu+\lambda-1)}{\Pi\lambda} J_{\nu+2\lambda}(x) F(\nu+\lambda, -\lambda, \nu+1, y^2).$$

21. (5a) $$\begin{cases} J_0(xy) = J_0(x) + 2\sum_{\lambda=1}^{\infty} J_{2\lambda}(x) F(\lambda, -\lambda, 1, y^2) \\ J_1(xy) = y\sum_{\lambda=0}^{\infty}(2\lambda+1) J_{2\lambda+1}(x) F(\lambda+1, -\lambda, 2, y^2). \end{cases}$$

---

6. (13) $$\begin{cases} J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xu\,du, \\ \quad\;\; = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_{0}^{1} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos xu\,du. \end{cases}$$

6. (14) $$\begin{cases} J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_{0}^{\pi} \cos(x\cos\omega) \sin^{2\nu}\omega\,d\omega, \\ \quad\;\; = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{x^\nu}{2^\nu \Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\omega) \sin^{2\nu}\omega\,d\omega. \end{cases}$$

9. (1) $$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu} \frac{1}{\Pi(\nu-\mu-1)} \int_0^1 u^{\frac{\mu}{2}} (1-u)^{\nu-\mu-1} J_\mu(x\sqrt{u})\,du,$$

unter der Voraussetzung, daß $\mu > -1$ und $\nu > \mu$ ist.

11. (4) $$J_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1} x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu+1}\omega} e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega.$$

8. (1) $$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\omega - n\omega)\,d\omega.$$

8. (2) $$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\omega)\,d\omega.$$

8. (3) $$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\sin\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\omega)\,d\omega.$$

11. (5) $$Y_\nu(x) = \frac{2^{\nu+1}x^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Pi(\nu-\frac{1}{2})}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{\nu-\frac{1}{2}}\omega\,\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{2}\omega\right)}{\sin^{2\nu+1}\omega}\,e^{-2x\operatorname{cotg}\omega}\,d\omega.$$

---

17. (25) $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)}{x}\,dx = \frac{1}{\nu}. \qquad (\nu > 0)$$

17. (26) $$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)\,dx}{x^{\nu-2k+1}} = \frac{\Pi(k-1)}{2^{\nu-2k+1}\,\Pi(\nu-k)}. \qquad \left\{\begin{matrix}\nu > -\frac{3}{2} \\ 0 < k < \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\end{matrix}\right\}$$

17. (11 a) $$\int_x^\infty J_\nu(u)J_\mu(u)\frac{du}{u} = \frac{1}{\nu^2-\mu^2}\left\{\frac{2}{\pi}\sin(\nu-\mu)\frac{\pi}{2} - xJ_\mu J_\nu' + xJ_\nu J_\mu'\right\},$$

17. (11 b) $$\int_x^\infty Y_\nu(u)\,Y_\mu(u)\frac{du}{u} = \frac{1}{\nu^2-\mu^2}\left\{\frac{2}{\pi}\sin(\nu-\mu)\frac{\pi}{2} - x\,Y_\mu\,Y_\nu' + Y_\nu\,Y_\mu'\right\},$$

17. (11 c) $$\int_x^\infty J_\nu(u)\,Y_\mu(u)\frac{du}{u} = \frac{1}{\nu^2-\mu^2}\left\{\frac{2}{\pi}\cos(\nu-\mu)\,\frac{\pi}{2} - x\,Y_\mu J_\nu' + xJ_\nu\,Y_\mu'\right\}.$$

$$\frac{4\nu^2-1}{x}\int_x^\infty J_\nu^2(u)\frac{du}{u^2}=$$

17. (19)
$$=\frac{4}{\pi x}-\left\{\frac{1}{x^2}J_\nu^2+\frac{2}{x}J_\nu J_\nu'+2(J_\nu')^2+2\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu^2\right\}$$
$$=\frac{4}{\pi x}-\left\{\left(\frac{1}{x}J_\nu+J_\nu'\right)^2+(J_\nu')^2+2\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu^2\right\}.$$

Genau die entsprechende Formel gilt für Y_ν.

17. (21 a)
$$(\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\,dx=$$
$$=\beta J_\nu(\alpha)J_\nu'(\beta)-\alpha J_\nu(\beta)J_\nu'(\alpha),$$

17. (21 c)
$$(\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)J_\nu(\beta x)\,dx=$$
$$=\alpha J_\nu(\beta)J_{\nu+1}(\alpha)-\beta J_\nu(\alpha)J_{\nu+1}(\beta),\qquad (\nu>-1)$$

17. (21 c)
$$(\alpha^2-\beta^2)\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)Y_\nu(\beta x)\,dx=$$
$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu+\alpha Y_\nu(\beta)J_{\nu+1}(\alpha)-\beta J_\nu(\alpha)Y_{\nu+1}(\beta).$$

17. (22 a)
$$2\int_0^1 uJ_\nu^2(xu)\,du=\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu^2(x)+(J_\nu'(x))^2,\qquad (\nu>-1)$$

17. (22 b)
$$2\int_0^1 uJ_\nu(xu)Y_\nu(xu)\,du=\frac{2\nu}{\pi x^2}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu(x)Y_\nu(x)$$
$$+J_\nu'(x)Y_\nu'(x).$$

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.